

Gekoppelte numerische Simulationen fluid-, thermo- und elektrodynamischer Prozesse

Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung
der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

DISSERTATION

von
Dipl.-Ing. Robert Oestreich

geboren am 29.07. 1976 in Frankfurt am Main

Darmstadt 2007

Referent:	Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland
Korreferent:	Prof. Dr. rer.nat. Michael Schäfer

Tag der Einreichung:	19.06. 2007
Tag der mündlichen Prüfung:	30.08. 2007

D 17
Darmstädter Dissertation

Diese Arbeit ist meinen Eltern gewidmet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Lösungsansatz	3
1.3	Durchgeführte Arbeiten	5
2	Grundlagen	7
2.1	Fluiddynamik	7
2.2	Transport thermischer Energie	10
2.3	Finite-Volumen-Diskretisierung	12
2.4	Elektrodynamik	16
2.5	Finite Integration	18
3	Gekoppelte Simulation	23
3.1	Verwendete Codes	23
3.1.1	FASTEST	23
3.1.2	MAFIA	25
3.2	Berechnung der Kopplungsgrößen in der FIT	25
3.3	Interpolation	26
3.3.1	Gitterzuordnung	27
3.3.2	Nächster-Nachbar-Interpolation	29
3.3.3	Trilineare Interpolation	31
3.3.4	SHEPARD-Interpolation	32
3.3.5	Konvergenzuntersuchung der Interpolationsverfahren . . .	33
3.4	Gekoppeltes Gleichungssystem	35
3.5	Kopplungsalgorithmus	37
3.6	Codes zur Umsetzung der Kopplungsschnittstelle	38
3.6.1	3Dint	40
3.6.2	MpCCI	40
3.7	Testbeispiel	41
3.7.1	Konvergenz der räumlichen Diskretisierung	45
3.7.2	Konvergenz der zeitlichen Diskretisierung	47
3.7.3	Einfluß des Toleranzparameters der inneren Iteration . . .	49

4 Simulationsbeispiele	55
4.1 Fluidgekühltes Kabel	55
4.2 Heizmodul	61
4.3 Lichtbogendynamik	67
5 Zusammenfassung	75
Symbolverzeichnis	77
Literaturverzeichnis	80
Danksagung	85
Lebenslauf	87

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Bei der Entwicklung technischer Geräte und Bauteile nimmt die numerische Simulation heute einen wichtigen Platz ein. Mit ihr ist es möglich, einzelne Designparameter vor dem Bau eines Prototypen zu bestimmen und so Entwicklungszeit und -kosten zu sparen. In weiten Bereichen der technischen Entwicklung wird auf den Bau von Prototypen ganz verzichtet und die vollständige Entwicklung mit Hilfe von Simulationen durchgeführt.

Oft ist die vollständige Entwicklung eines technischen Systems mittels Simulationen dadurch eingeschränkt, daß die Komplexität des betrachteten Systems die Fähigkeiten der vorhandenen Simulationswerkzeuge übersteigt. Dies kann hinsichtlich der geometrischen Abmessungen oder geometrischen Details eines Systems oder hinsichtlich der auftretenden physikalischen Prozesse sein. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Kopplung von verschiedenen physikalischen Prozessen und deren numerischer Simulation.

Bei technischen Anwendungen koppeln häufig elektromagnetische, thermische und fluiddynamische Prozesse miteinander. Im allgemeinen sind die elektromagnetischen Materialparameter temperaturabhängig. Daher ist bei Simulationen elektromagnetischer Vorgänge, die hinreichend genau für die Bestimmung einzelner Designparameter sind, die Temperaturverteilung im betrachteten Gebiet von entscheidender Bedeutung. Ein unmittelbarer Einfluß der Elektrodynamik auf die thermischen Vorgänge besteht durch die JOULEschen Verluste. Diese sind in der thermischen Betrachtung als Wärmequellendichte zu berücksichtigen. Ein weiterer erheblicher Einflußfaktor in der Thermodynamik ist die Konvektion vorhandener Fluide. Sie bewirkt einen konvektiven Wärmetransport. Meist ist der Einfluß des konvektiven Wärmetransportes auf die Temperaturverteilung erheblich. Diese Zusammenhänge sind beispielsweise bei Halbleiterbauelementen zu beobachten. Zum Teil werden diese in der Praxis mit einer erzwungenen Konvektion gekühlt.

Eine unmittelbare Kopplung zwischen der Elektro- und der Fluidodynamik tritt auf, wenn das Fluid elektrisch leitfähig ist. In diesem Falle resultieren aus dem elektrischen Strom innerhalb des Fluides und vorhandenen Magnetfeldern LORENTZkräfte. Diese sind Volumenkräfte innerhalb des Fluides, die dessen Strömung beeinflussen. Eine solche zusätzliche Anregung ist in der Simulation des fluiddynamischen Teilproblems zu berücksichtigen. Anwendungsbeispiele hierfür finden sich in der Magnetohydrodynamik, z. B. bei der Simulation eines Lichtbogens.

Drei Anwendungsbeispiele, die eine gekoppelte Betrachtung der drei physikalischen Teilgebiete der Elektro-, der Fluid- und der Thermodynamik erfordern, werden in dieser Arbeit behandelt.

Zunächst wird ein wassergekühltes Kupferkabel betrachtet. Solche Kabel kommen beispielsweise in Spulen in der Beschleunigertechnik zum Einsatz. In Abbildung 1.1 sind zwei solcher Spulen mit den Anschlüssen für das Kühlwasser

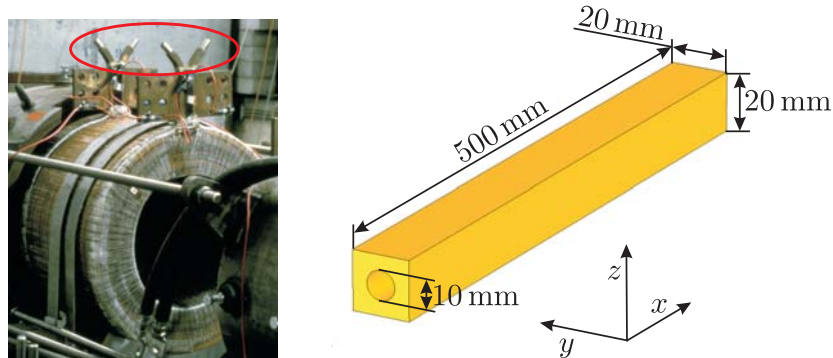


Abbildung 1.1: Spule mit Wasseranschlüssen (links) und schematische Darstellung des Simulationsmodells (rechts).

gezeigt. In dem Simulationsmodell ist der Kanal für das Kühlwasser zu erkennen. Zur numerischen Simulation des Verhaltens des Kabels muß die Wechselwirkung zwischen den elektrodynamischen, den fluiddynamischen und den thermischen Prozessen beachtet werden.

Das zweite Anwendungsbeispiel ist ein Heizmodul für elektrisch leitfähige Fluide. Ein elektrischer Strom, der durch ein solches Fluid fließt, verursacht JOULEsche Verluste. Dadurch wird das Fluid aufgeheizt. Zur technischen Realisierung eines solchen Moduls sind verschiedene Bauformen denkbar. In dieser Arbeit wird ein Modul betrachtet, das von dem Fluid durchströmt wird. Das Gehäuse des Moduls ist aus Teflon. Im Innern sind zwei Elektroden aus Edelstahl angebracht. Das Modul ist schematisch in Abbildung 1.2 gezeigt. Auch hier sind in der numerischen Simulation die Wechselwirkungen zwischen den physikalischen Teilproblemen zu beachten.

Im dritten Anwendungsbeispiel wird die Bewegung eines Lichtbogens in einem Niederspannungsschutzschalter betrachtet. Der Lichtbogen wird mit einem

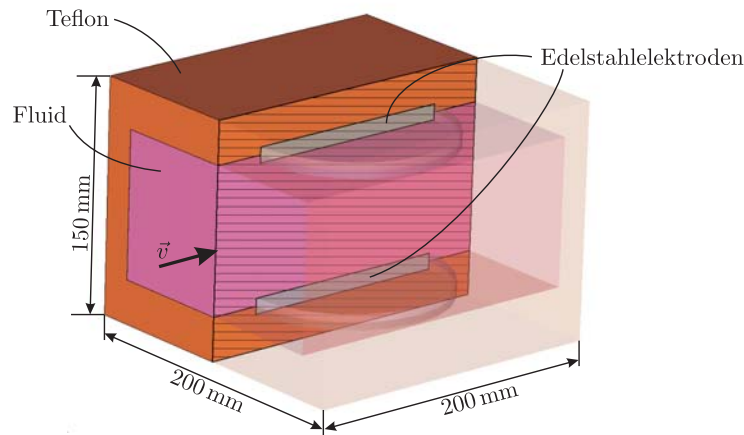


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung des Heizmoduls.

einfachen magnetohydrodynamischen Modell simuliert. Es besteht eine starke Kopplung zwischen allen zuvor erläuterten physikalischen Phänomenen.

1.2 Lösungsansatz

Die in dieser Arbeit betrachteten physikalischen Teilgebiete werden durch drei Differentialgleichungen bzw. Sätze von Differentialgleichungen beschrieben: die MAXWELL Gleichungen, die Differentialgleichungen der Fluidodynamik – diese beinhalten die NAVIER-STOKES-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung – und die Energietransportgleichung.

Zur numerischen Simulation gekoppelter Probleme existieren verschiedene Lösungsansätze. Eine Möglichkeit besteht darin, alle Differentialgleichungen auf demselben Gitter zu diskretisieren, sog. monolithischer Ansatz. Dies führt zu einem großen System algebraischer Gleichungen. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß die Lösung in einem iterativen Lösungsverfahren schnell konvergiert. Nachteilig ist der hohe Speicherbedarf aufgrund der großen Systemmatrix. Außerdem ist für die Lösung ein spezieller Code zu verwenden bzw. entwickeln, der nur für diese eine Art von Problem anwendbar ist. Beispiele für monolithische Ansätze in der Simulation der Fluid-Struktur-Interaktion finden sich in [1, 2].

Die zweite Möglichkeit besteht in einem partitionierten Ansatz. Dabei werden für die einzelnen physikalischen Teilgebiete jeweils spezielle Simulationscodes verwendet. Ein Vorteil dieser Möglichkeit ist, daß sich der evtl. zu leistende Entwicklungsaufwand auf die Kopplungsschnittstelle zwischen den Codes beschränkt. Nachteilig ist die langsamere Konvergenz bei der numerischen Lösung. Ein solcher Ansatz in der Fluid-Struktur-Interaktion wird in [3] verwendet, die

Kopplung zwischen Elektro- und Thermodynamik behandelt [4] mit einem partitionierten Ansatz.

In dieser Arbeit wurde der partitionierte Ansatz gewählt. Den Ausgangspunkt bildeten dabei zwei gut erprobte Simulationsprogramme. Für die Lösung des fluid- und thermodynamischen Teils wird FASTEST verwendet [5]. Die Elektrodynamik wird mit MAFIA simuliert [6].

Für die betrachteten Probleme ergeben sich für jeden Simulationscode zusätzliche Eingangsparameter, die bei der Lösung der Differentialgleichungen zu berücksichtigen sind. In FASTEST müssen bei der Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichung die LORENTZkräfte, die in MAFIA berechnet werden, als zusätzlicher Quellterm berücksichtigt werden, ebenso wie bei der Lösung der Energietransportgleichung die Wärmequellendichte, die sich aus der Verlustleistungsdichte, die MAFIA ermittelt, ergibt. Auf der anderen Seite müssen in MAFIA die elektrischen Materialeigenschaften als temperaturabhängige Größen behandelt werden. Die von FASTEST berechnete Temperatur ist dabei die Eingangsgröße für die temperaturabhängige Berechnung.

In MAFIA kommt ein strukturiertes dual-orthogonales Gitter für das gesamte Rechengebiet zum Einsatz. FASTEST hingegen erfordert blockstrukturierte randangepaßte Gitter. Demzufolge sind die Gitter meist nicht deckungsgleich, so daß für den Datenaustausch zwischen den Programmen eine Interpolation der Größen erforderlich ist.

Bei der gekoppelten Simulation muß die zeitliche Synchronisation der beteiligten Programme gewährleistet werden. Während FASTEST eine Lösung der Fluid- und Thermodynamik berechnet, muß MAFIA auf neue Eingangsparameter warten. Eine neue Berechnung mit MAFIA findet erst statt, wenn seitens FASTEST aktuelle Ergebnisse vorliegen. Ebenso gilt dies umgekehrt für das Berechnen einer Lösung mit MAFIA.

Je nach Problemstellung können die elektromagnetischen, thermischen und fluiddynamischen Größen stark gekoppelt sein. Die gekoppelte Simulation muß daher eine Fixpunktiteration ermöglichen. Diese ist bei Erreichen eines bestimmten Konvergenzkriteriums zu beenden. Die Möglichkeit der Durchführung der Fixpunktiteration ist sowohl für stationäre als auch für transiente Simulationen bereitzustellen, in letzterem Fall innerhalb jeden Zeitschrittes.

Die Kopplungsschnittstelle zwischen den beiden Programmen muß ergo folgende Aufgaben erfüllen:

- Interpolation der Daten zwischen den Gittern (einschließlich des Datentransportes),
- Synchronisation des Ablaufs der beteiligten Programme,
- Konvergenzüberprüfung der Fixpunktiteration.

1.3 Durchgeführte Arbeiten

Die Aufgabe dieser Arbeit bestand darin, die beiden Codes FASTEST und MAFIA zu koppeln. Die Kopplung sollte die Simulation der oben beschriebenen Vorgänge ermöglichen.

Die Quellcodes von FASTEST und MAFIA wurden an die Erfordernisse der Kopplung angepaßt. Funktionen zum Im- und Exportieren der Kopplungsgrößen waren zu implementieren. Die Gleichungslöser der beiden Programme wurden erweitert, so daß die Größen, die durch die Kopplung zusätzlich auftreten, berücksichtigt werden.

Die Kopplungsschnittstelle wurde auf zwei unterschiedliche Arten umgesetzt – einmal wurde eine eigene Kopplungsschnittstelle entwickelt, diese wird 3Dint genannt, zum anderen wird die Bibliothek MpCCI verwendet [21].

Zu Beginn einer Simulation, bei der 3Dint verwendet wird, werden die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Punkten des einen und den Zellen des anderen Gitters festgestellt. Diese Informationen werden für die spätere Interpolation der Felddaten zwischen den Gittern in Dateien abgelegt.

Der Datenaustausch mit 3Dint beginnt damit, daß die von einem der beteiligten Codes berechneten Größen exportiert werden. Der Austausch der Daten erfolgt über ASCII-Dateien. Diese enthalten die Punkte des Gitters und die ausgetauschten Größen an diesen Punkten.

Im nächsten Schritt werden diese exportierten Felddaten von einem Interpolationsprogramm auf das Gitter des anderen Programmes übertragen. Das Ergebnis der Interpolation wird wieder in eine ASCII-Datei abgelegt.

Schließlich liest das zweite Programm diese ASCII-Datei ein und verarbeitet die Daten bis es selbst wieder Feldgrößen in eine ASCII-Datei exportiert.

Die Steuerung des zeitlichen Programmablaufes erfolgt ebenso über Dateien. FASTEST bzw. MAFIA zeigen durch das Anlegen bestimmter Dateien an, daß der Datenexport abgeschlossen ist und die Daten zur Weiterverarbeitung bereit liegen. Eine weitere Datei zeigt dem jeweiligen Simulationsprogramm an, daß wiederum Daten zur Abholung bereit sind. Die Kontrolle dieses Ablaufes erfolgt auf einer speziell entwickelten Programminstanz, die den beiden Rechenprogrammen übergeordnet ist.

Im Rahmen der Entwicklung von 3Dint wurden das Kontrollprogramm, ein Suchprogramm, das die Beziehungen zwischen den Gittern ermittelt, und ein Interpolationsprogramm implementiert.

Bei der Verwendung von MpCCI muß zunächst die Bibliothek an beide vorhandenen Codes, FASTEST und MAFIA, angebunden werden. Die Aufgaben der Feststellung der Nachbarschaftsbeziehungen, der Interpolation, des Datenaustauschs und der Ablaufsteuerung werden dann durch Funktionen übernommen, die in der Bibliothek bereitgestellt werden. Für diese Funktionen müssen die Daten in einem bestimmte Format vorliegen. Die internen Daten in FASTEST und MAFIA mußten daher entsprechend aufbereitet werden. Die Kommunikation der Prozesse, die an der Simulation beteiligt sind, erfolgt nach dem MPI-Standard.

Die Konvergenz der Fixpunktiteration wird anhand der Änderung der Temperaturverteilung zwischen zwei Iterationszyklen bestimmt. In MAFIA wird die aktuelle Temperaturverteilung mit der Temperaturverteilung der letzten Berechnung verglichen. Erfüllt die Differenz der beiden Temperaturverteilungen ein bestimmtes Kriterium, so wird die Fixpunktiteration beendet und damit im Falle einer stationären Simulation die Berechnung beendet oder im Falle einer transienten Simulation der nächste Zeitschritt begonnen.

Anhand der Bewegung eines Lichtbogens zwischen zwei Kupferplatten, bei der die physikalischen Teilgebiete stark miteinander koppeln, wurde das numerische Verhalten der Kopplungsschnittstellen untersucht. Es wurde der Einfluß verschiedener numerischer Parameter (Toleranzparameter, Zeitschrittweite, Gitterschrittweite) auf das Simulationsverhalten überprüft.

Schließlich wurden die im Abschnitt 1.1 erläuterten Beispiele, das fluidgekühlte Kabel, das elektrische Heizmodul und die Ausbreitung des Lichtbogens, gerechnet.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen und numerische Verfahren

2.1 Fluiddynamik

Die Strömung eines Fluides wird durch den Druck p , die Dichte ρ , die Temperatur T und das Feld der Strömungsgeschwindigkeiten \vec{v} beschrieben [8, 9]. Dabei sind zwei Betrachtungsweisen der Geschwindigkeit zu unterscheiden. Zum einen kann das Geschwindigkeitsfeld als Funktion von Ort und Zeit beschrieben werden und zum anderen als Funktion der Zeit für jedes Makroteilchen innerhalb des Fluides. Folglich ergeben sich zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen der zeitlichen Ableitung, die *lokale* Ableitung für einen festen Ortsvektor $\frac{\partial}{\partial t}$ und die *substantielle* Ableitung für jedes Fluidteilchen $\frac{d}{dt}$. Zwischen den beiden Ableitungen besteht der Zusammenhang [8]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla. \quad (2.1)$$

Von elementarer Bedeutung für die Strömung eines Fluides ist die Kontinuitätsgleichung [8]. Betrachtet man ein Volumen, das stets von denselben Fluidteilchen gebildet wird, so ist dessen Masse über die Zeit konstant, die Grenzen des Volumens sind aber zeitlich veränderlich. Die substantielle Ableitung der Masse nach der Zeit muß ergo Null sein,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = 0. \quad (2.2)$$

Die Ableitung des Volumenintegrals mit zeitlich veränderlichen Grenzen ist [8]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0. \quad (2.3)$$

Da diese Beziehung für alle möglichen Volumina gelten muß, folgt daraus die Kontinuitätsgleichung der Strömungsmechanik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.4)$$

Demzufolge resultiert eine lokale Änderung der Dichte sowohl aus dem konvektiven Transport einer räumlich nicht konstanten Dichte, $\vec{v} \operatorname{grad} \rho$, als auch aus der lokalen Kompression des Fluides, $\rho \operatorname{div} \vec{v}$. Die Kompression eines Fluides wird also mathematisch beschrieben durch die Divergenz des Strömungsfeldes.

Für die Praxis sind inkompressible Fluide von besonderer Bedeutung. Üblicherweise werden Prozesse als inkompressibel betrachtet, wenn die auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten kleiner als 30 % der Schallgeschwindigkeit sind [10]. In einem inkompressiblen Fluid ist die Dichte jedes betrachteten Makroteilchens, das sich entlang der Strömungslinien bewegt, über die Zeit konstant, d. h.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.5)$$

Damit folgt aus der Kontinuitätsgleichung (2.4) unter Berücksichtigung von Gleichung (2.1) für den inkompressiblen Fall die wichtige Beziehung

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.6)$$

Das Strömungsfeld ist bei inkompressiblen Strömungen ergo stets divergenzfrei.

Die dynamischen Vorgänge in einem Fluid werden durch die NAVIER-STOKES-Gleichung beschrieben. Zur Herleitung dieser Gleichung wird zunächst ein ideales Fluid betrachtet. Ein ideales Fluid ist reibungsfrei, so daß keine inneren Scher- und Reibungskräfte auftreten. Folglich können die Kräfte \vec{F} auf ein Volumen im Innern eines idealen Fluides nur zwei Anteile haben, einen, der aus der äußeren Kraftdichte \vec{f} herrührt, und einen, dessen Ursache die innere Druckverteilung p ist,

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV - \oint_{\partial V} p d\vec{A}. \quad (2.7)$$

Die auftretenden äußeren Kraftdichten sind beispielsweise die Gravitation, $\vec{f} = \rho \vec{g}$ oder – in dieser Arbeit von besonderer Relevanz – die LORENTZkräfte in einem elektrisch leitfähigen Fluid (s. Abschnitt 2.4).

Diese Kräfte bewirken eine Beschleunigung der Masse im betrachteten Volumen und folglich eine Änderung des Impulses [8]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V (\vec{f} - \operatorname{grad} p) dV. \quad (2.8)$$

Das Oberflächenintegral aus Gleichung (2.7) wurde mit Hilfe des Satzes von GAUSS in ein Volumenintegral umgewandelt.

Verwendet man die Indexschreibweise gemäß EINSTEINScher Summenkonvention, so läßt sich Gleichung (2.8), die EULER-Gleichung, schreiben als

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} p, \quad (2.9)$$

dabei sind die drei Raumrichtungen als x_1, x_2 und x_3 bezeichnet. Diese Schreibweise ist für die Differentialgleichungen der Fluidodynamik sehr günstig und wird daher fortan verwendet. Die EULER-Gleichung beschreibt als Einflußgrößen auf das Geschwindigkeitsfeld eines Fluides eine Kraftdichte f_i , eine räumlich nicht konstante Druckverteilung p und einen konvektiven Impulstransport $\partial(\rho v_i v_j)/\partial x_j$.

Die Betrachtung eines idealen Fluids trifft in der Praxis meist nicht zu. Vielmehr ist die innere Reibung in dem Fluid zu berücksichtigen. Sie wird durch die Viskosität des Mediums beschrieben. In einem viskosen Fluid treten zusätzliche Kräfte aufgrund der inneren Reibung auf. Neben dem bereits in der EULER-Gleichung beschriebenen konvektiven Impulstransport findet zusätzlich ein diffusiver Impulstransport statt. Zu dessen Beschreibung wird der Materialparameter η , die dynamische Viskosität, eingeführt. Die EULER-Gleichung (2.9) wird dann zur NAVIER-STOKES-Gleichung viskoser Fluide [10]

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right], \quad (2.10)$$

δ_{ij} ist das KRONECKER-Symbol.

Betrachtet man eine inkompressible Strömung, so folgt mit Gleichung (2.6)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (2.11)$$

In der Praxis ist es oft die Annahme zulässig, daß sich die dynamische Viskosität η innerhalb des Fluids räumlich nicht ändert. Mit dieser Annahme wird die NAVIER-STOKES-Gleichung für inkompressible Strömungen zu

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.12)$$

oder als Vektorgleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{f} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}. \quad (2.13)$$

Schließlich ist noch eine Zustandsgleichung für den Druck zu betrachten. Diese hat die allgemeine Form

$$p = f(\rho, T), \quad (2.14)$$

wobei T die Temperaturverteilung ist. Diese Gleichung und die Gleichung für die innere Energie (s. Abschn. 2.2) bilden zusammen die *kalorischen Zustandsgleichungen* des Fluides. In vielen Fällen ist es zulässig, das Fluid als ideales

Gas zu behandeln [10]. In diesem Fall wird Gleichung (2.14) zu

$$p = \rho RT, \quad (2.15)$$

mit der spezifischen Gaskonstante R des Fluids.

Eine wichtige Form der Gleichungen (2.11) und (2.13) ergibt sich im stationären Fall, also bei der Betrachtung von Problemen, bei denen sich ein stabiler Zustand, der nicht mehr von der Zeit abhängt, einstellt. In diesem Fall gilt $\partial/\partial t = 0$. Somit folgt für die Gleichungen (2.11) und (2.13)

$$\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.16)$$

bzw.

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}. \quad (2.17)$$

Die numerische Untersuchung der Fluidmechanik wird auch als CFD (engl. *Computational Fluid Dynamics*) bezeichnet.

2.2 Transport thermischer Energie

Die innere Energie eines Makroteilchens in einem fluiden Medium ist gegeben durch

$$W_i = \int_V \rho c_p T \, dV, \quad (2.18)$$

wobei c_p die spezifische Wärmekapazität ist. Da ρ und c_p materialspezifische Parameter sind, ist die thermische Energie eines Volumens als einzige Zustandsgröße durch die Temperaturverteilung im Volumen vollständig beschrieben.

Eine zeitliche Änderung der inneren Energie kann drei Ursachen haben.

Fließt durch die Oberfläche des Volumens eine Wärmestromdichte \vec{J}_w , so hat dies eine Änderung der inneren Energie zur Folge. Die Wärmestromdichte ist gemäß dem FOURIERSchen Gesetz gegeben durch [11]

$$\vec{J}_w = \lambda \text{grad } T. \quad (2.19)$$

Sie beschreibt den diffusiven Energietransport in einem Medium. Die relevante Materialeigenschaft ist die thermische Leitfähigkeit λ . Für die zeitliche Änderung der inneren Energie folgt

$$\frac{dW_i}{dt} = - \oint_{\partial V} \vec{J}_w \cdot d\vec{A} = - \int_V \text{div } \lambda \text{grad } T \, dV. \quad (2.20)$$

Als weitere Ursache für eine Änderung der inneren Energie können im Volumen räumlich verteilte Wärmequellen und -senken vorhanden sein. Sie geben pro Zeiteinheit eine bestimmte Energie ab (Quelle) oder nehmen sie auf (Senke). Ihre Verteilung im Raum wird durch die Wärmequellendichte Q_w beschrieben.

Die physikalische Einheit der Wärmequellen ist Watt (W). Neben heizenden oder kühlenden Bauteilen kommen hier in der Praxis auch chemische, elektromagnetische oder fluiddynamische Prozesse in Betracht, bei denen chemische, elektromagnetische oder kinetische Energie in thermische Energie umgewandelt wird. Für diese Arbeit sind die JOULEschen Verluste bei elektrischen Strömen (s. Abschn. 2.4) von besonderem Interesse. Aufgrund der inneren Reibung in einem realen Fluid wird ein Teil der kinetischen Energie in thermische Energie umgewandelt. Diese Reibungsleistungsdichte im inkompressibel strömenden Medium ist Teil der Wärmequellendichte Q_w und durch

$$Q_w = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.21)$$

gegeben. Die gesamte Änderung der inneren Energie verursacht durch Quellen und Senken ist

$$\frac{dW_i}{dt} = \int_V Q_w dV. \quad (2.22)$$

Schließlich wird sich die innere Energie des Volumens aufgrund von Ein- und Abstrahlung ändern [11]. In dieser Arbeit wurde für die Strahlungsleistung Q_s an einem Ort in dem betrachteten Gebiet lediglich der Wärmeaustausch mit der Umgebung berücksichtigt. Die Strahlungsleistung ist dann gemäß dem STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz [12]

$$Q_s = \alpha \sigma (T^4 - T_0^4), \quad (2.23)$$

wobei α ein empirisch gewonnener Wert ist, der den Strahlungsaustauschkoeffizienten und die Strahlungsfläche beschreibt, σ ist die STEFAN-BOLTZMANN-Konstante und T_0 die Umgebungstemperatur. Der Wärmeaustausch zwischen sich im Inneren des Gebietes befindlichen Körpern ist dabei nicht berücksichtigt. Aufgrund der Strahlung ergibt sich für die innere Energie die Änderung:

$$\frac{dW_i}{dt} = - \int_V Q_s dV. \quad (2.24)$$

Die gesamte zeitliche Änderung der inneren Energie eines strömenden Fluidteilchens ist damit

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho c_p T dV = \int_V [-\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + Q_w - \alpha \sigma (T^4 - T_0^4)] dV. \quad (2.25)$$

Mit der zeitlichen Ableitung des Volumenintegrals mit zeitlich veränderlichen Grenzen gemäß [8] folgt für die Differentialgleichung des thermischen Energietransportes

$$c_p \left(\frac{\partial (\rho T)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho T \vec{v}) \right) = -\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + Q_w - \alpha \sigma (T^4 - T_0^4). \quad (2.26)$$

Wird der Ausdruck in Klammern auf der linken Seite mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (2.4) umgeformt, so ergibt sich schließlich

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } T \right) = -\text{div } \lambda \text{grad } T + Q_w - \alpha \sigma (T^4 - T_0^4). \quad (2.27)$$

Eine zeitliche Änderung der lokalen Temperatur hat demzufolge mehrere Ursachen. In einem strömenden fluiden Medium findet ein konvektiver Wärmetransport statt, $\vec{v} \text{grad } T$. Der Term $\text{div } \lambda \text{grad } T$ beschreibt die Wärmediffusion im Medium. Eine räumlich verteilte Wärmequellendichte Q_w beschreibt die Wärmequellen und -senken, einschließlich der Reibungsleistung der Strömungsbewegung im Fluid sowie der JOULEschen Verluste der Elektrodynamik. Schließlich kann noch Wärmestrahlung $\alpha \sigma (T^4 - T_0^4)$ auftreten. All diese Effekte werden bei den Untersuchungen in dieser Arbeit berücksichtigt.

Auch für die Simulation des Transports thermischer Energie ist der stationäre Fall relevant. Gleichung (2.27) wird dann zu

$$\rho c_p (\vec{v} \text{grad } T) = -\text{div } \lambda \text{grad } T + Q_w - \alpha \sigma (T^4 - T_0^4). \quad (2.28)$$

2.3 Finite-Volumen-Diskretisierung

Zur numerischen Lösung der Differentialgleichungen der Fluidodynamik und der Thermodynamik wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Finite-Volumen-Diskretisierung auf einem blockstrukturierten Gitter verwendet [10, 5]. Eine der wichtigsten Eigenschaften von Finite-Volumen-Methoden hinsichtlich ihrer Anwendung in der Kontinuumsmechanik ist, daß die Erhaltungsprinzipien der kontinuierlichen Kontinuumsmechanik *per definitionem* ins Diskrete übertragen werden; solche numerischen Verfahren bezeichnet man als konservativ.

Auf die numerische Zeitintegration wird hier nicht eingegangen. In der Praxis kommen verschiedene Verfahren zum Einsatz. Je nach Anforderung an die Genauigkeit der zeitlichen Diskretisierung kann hier ein geeignetes Verfahren gewählt werden. Als häufig verwendete Verfahren seien erwähnt das explizite und das implizite EULER-Verfahren und die Θ -Verfahren, insbesondere das zweiter Ordnung genaue CRANK-NICHOLSON-Verfahren [10, 14].

Die räumliche Diskretisierung der Differentialgleichungen der Fluid- und der Thermodynamik wird am Beispiel der Impulsbilanzgleichung, der NAVIER-STOKES-Gleichung (2.11), gezeigt. Das Vorgehen für die Differentialgleichung der Thermodynamik und die Kontinuitätsgleichung ist analog.

Zur Diskretisierung der NAVIER-STOKES-Gleichung wird die Differentialgleichung in einem Kontrollvolumen des Gitters betrachtet. Es wird das Integral über das Kontrollvolumen V gebildet (s. Abb. 2.1),

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \left[f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] dV. \quad (2.29)$$

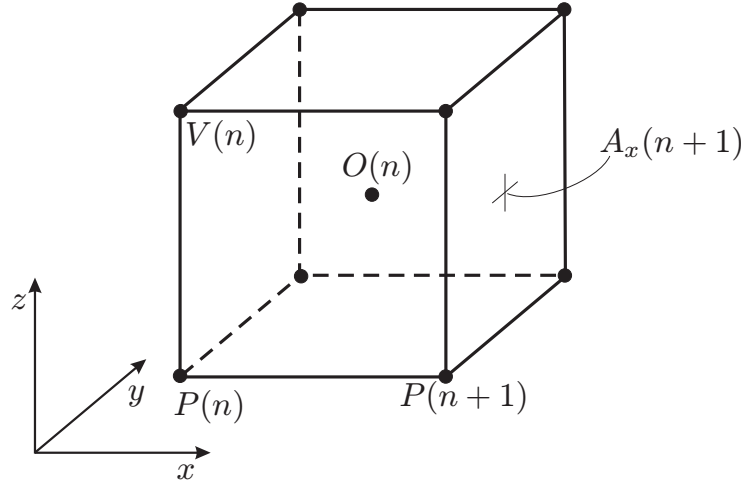


Abbildung 2.1: Kontrollvolumen des blockstrukturierten Gitters. Die Indizierung der Gitterpunkte erfolgt nach dem kanonischen Indizierungsschema [15]. Die Knoten des Gitters werden mit P , die Zellzentren mit O bezeichnet. Das Volumen des Kontrollvolumens ist V . Die Seitenflächen A_x Ist die Fläche, deren Normale in x -Richtung zeigt.

Mit Hilfe des Satzes von GAUSS können einige der Integrale in Oberflächenintegrale umgewandelt werden,

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho v_i v_j n_j dA = \int_V f_i dV + \oint_{\partial V} \left[-p n_i + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \right] dA, \quad (2.30)$$

wobei n_i die Komponenten des Normalenvektors auf der Fläche ∂V sind. Diese Gleichung enthält nun zwei Arten von physikalischen Größen, zum einen ergeben die Integrale über das Kontrollvolumen eine volumenbezogene Größe, zum anderen resultieren aus den Oberflächenintegralen Oberflächenflüsse.

Die Integrale über die Oberfläche des Kontrollvolumens in Gleichung (2.30) beschreiben den Impulstransport in das betrachtete Kontrollvolumen hinein bzw. aus ihm heraus. Der konvektive und diffusive Anteil dieses Impulstransportes werden numerisch häufig unterschiedlich behandelt.

Der nächste Schritt der Diskretisierung besteht darin, daß die Integrale in der Gleichung (2.30) in geeigneter Weise numerisch bestimmt werden. Prinzipiell kommen beliebige Quadraturformeln in Frage. Insbesondere können auch solche Verfahren höhere Ordnung, die dann mehrere Stützstellen für die Werte der Integranden benötigen, benutzt werden. Relevant für die Auswahl des Verfahrens ist die Anforderung im konkreten Einzelfall. Im folgenden werden Mittelpunkts-

quadraturformeln verwendet. Diese benötigen jeweils nur eine Stützstelle im Integrationsgebiet und haben einen Abbruchfehler 2. Ordnung.

Die unbekannten Variablen können an verschiedenen Orten im Gitter berechnet werden, beispielsweise in den Zentren der Kontrollvolumina oder in den Knoten des Gitters. Für die weiteren Erläuterungen wird eine zentrumsorientierte Allokation gewählt. Abbildung 2.1 zeigt ein Kontrollvolumen mit der entsprechenden Indizierung von Knoten-, Flächen- und Volumenelementen.

Für die Approximation der Volumenintegrale mit der Mittelpunktsregel ergibt sich – gezeigt am Beispiel des Integrals über das n -te Kontrollvolumen $V(n)$ über die äußere Kraftdichte in Gleichung (2.30) –:

$$\int_{V(n)} \vec{f} dV \approx f(n)V(n). \quad (2.31)$$

Dabei ist $f(n)$ der über das n -te Kontrollvolumen gemittelte Wert der Kraftdichte (s. Abb. 2.1) und $V(n)$ das Volumen des Kontrollvolumens.

Die Oberflächenflüsse werden in zwei Stufen ermittelt. Zuerst werden die Integrale selbst durch Quadratur mit Hilfe von Werten auf den Oberflächen der Kontrollvolumen numerisch bestimmt. Im zweiten Schritt werden diese Werte auf den Oberflächen dann durch die volumengemittelten Werte in den Zentren der Kontrollvolumina angenähert.

Die folgenden Betrachtungen werden der Übersichtlichkeit halber auf einem kartesischen äquidistanten Gitter in zwei Dimensionen durchgeführt. Alle Integrale über die geschlossene Oberfläche eines Kontrollvolumens können in Summen von Integralen über die Teilflächen des Kontrollvolumens zerlegt werden. Die Betrachtungen werden daher auf die Teilfläche in positiver x -Richtung des Kontrollvolumens, A_x , beschränkt. Die beiden Komponenten des Normalenvektors auf dieser Fläche werden dann zu $n_x = 1$ und $n_y = 0$. Das Vorgehen kann auf die anderen Teilflächen analog übertragen werden. Für die Anwendung der Methode auf einem allgemeinen, dreidimensionalen blockstrukturierten Gitter, wie es in dieser Arbeit zum Einsatz kommt, sind Besonderheiten zu berücksichtigen, die z. B. in [10] dargelegt werden, die aber für die prinzipielle grundlegende Betrachtung der Methode nicht von Bedeutung sind.

Drei unterschiedliche Integrale sind zu betrachten:

1. das Integral über die Druckverteilung $\int_{A_x(n+1)} p n_i dA$,
2. das Integral über den diffusiven Impulstransport $\int_{A_x(n+1)} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dA$,
3. das Integral über den konvektiven Impulstransport $\int_{A_x(n+1)} \rho v_i v_j n_j dA$.

Das Integral über die Druckverteilung auf der Fläche wird genähert zu

$$\int_{A_x(n+1)} p n_i dA \approx p_x(n+1) A_x(n+1). \quad (2.32)$$

Der Druck auf dem Schwerpunkt der Fläche $A_x(n+1)$ wird mit $p_x(n+1)$ bezeichnet (s. Abb. 2.1). Die Approximation des Wertes des Drucks auf dem Flächenschwerpunkt durch die Werte in den Zentren der Kontrollvolumen erfolgt gemäß

$$p_x(n+1) \approx \frac{x(n+1) - x(n+2)}{x(n) - x(n+2)} p(n) + \frac{x(n) - x(n+1)}{x(n) - x(n+2)} p(n+1), \quad (2.33)$$

wobei $x(n)$ die x -Koordinate der Fläche $A_x(n)$ und $p(n)$ der über das n -te Kontrollvolumen gemittelte Druck ist, die übrigen Bezeichnungen sind analog.

Der diffusive Impulstransport durch die betrachtete Fläche $A_x(n+1)$ angenähert mit der Mittelpunktsregel ist

$$\int_{A_x(n+1)} 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} dA \approx 2\eta_x(n+1) A_x(n+1) \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{x(n+1)}. \quad (2.34)$$

Die Richtungsableitung in x -Richtung der x -Komponente der Geschwindigkeit wird durch einen zentralen Differenzenquotienten genähert,

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{x(n+1)} \approx \frac{v_x(n+1) - v_x(n)}{\frac{1}{2}(x(n) - x(n+2))}. \quad (2.35)$$

Die dynamische Viskosität auf der Fläche wird aus Werten in den beiden benachbarten Zellzentren gemittelt,

$$\eta_x(n+1) \approx \frac{x(n+1) - x(n+2)}{x(n) - x(n+2)} \eta(n) + \frac{x(n) - x(n+1)}{x(n) - x(n+2)} \eta(n+1). \quad (2.36)$$

Das Integral über den konvektiven Impulstransport für die betrachtete Fläche $A_x(n+1)$ wird schließlich zu

$$\int_{A_x(n+1)} \rho v_x v_x dA \approx \rho_x(n+1) v_{x,x}(n+1) v_{x,x}(n+1) A_x(n+1). \quad (2.37)$$

Dieser Näherungsterm ist nichtlinear. Er wird durch die Verwendung einer PICARD-Iteration linearisiert. Der Massenfluß durch die Fläche $\dot{m}_x(n+1) = \rho_x(n+1) v_{x,x}(n+1) A_x(n+1)$ wird zunächst als bekannt angenommen. Bei bekanntem Massenfluß bleibt $v_{x,x}(n+1)$ durch Werte in den benachbarten Zellzentren anzunähern. Für diese Näherung ist eine *Flux-Blending*-Technik gebräuchlich. Die Größe $v_{x,x}(n+1)$ wird anteilig mit einem zentralen Differenzenverfahren $v_{x,x}^C(n+1)$ und einem *Upwind*-Verfahren $v_{x,x}^U(n+1)$ bestimmt,

$$v_{x,x}(n+1) = v_{x,x}^U(n+1) - \beta (v_{x,x}^U(n+1) + v_{x,x}^C(n+1)). \quad (2.38)$$

Für den Wichtungsfaktor β gilt

$$0 \leq \beta \leq 1.$$

Für $\beta = 0$ ergibt sich ein reines *Upwind*, für $\beta = 1$ eine reine zentrale Differenz. Mit dem *Upwind*-Verfahren wird der Wert für $v_{x,x}(n)$ bestimmt zu

$$v_{x,x}^U(n+1) = \begin{cases} v_x(n) & \dot{m}_x(n+1) \geq 0 \\ v_x(n+1) & \dot{m}_x(n+1) < 0 \end{cases}. \quad (2.39)$$

Die Verwendung einer zentralen Differenz liefert

$$v_{x,x}^C(n+1) \approx \frac{x(n+1) - x(n+2)}{x(n) - x(n+2)} v_x(n) + \frac{x(n) - x(n+1)}{x(n) - x(n+2)} v_x(n+1). \quad (2.40)$$

Nun bleibt noch die Betrachtung des Massenflusses $\dot{m}_x(n)$, der ja bislang als bekannt angenommen wurde. Die Lösung der aus der NAVIER-STOKES-Gleichung gewonnenen algebraischen Gleichung erfolgt iterativ. Der Massenfluß wird dabei in jedem Iterationsschritt durch Werte aus dem vorherigen Iterationsschritt bestimmt. Dies entspricht formal einer PICARD-Iteration [10].

2.4 Elektrodynamik

JAMES CLERK MAXWELL hat im Jahre 1864 die damals bekannten Gesetze der Elektrodynamik in vier Gleichungen zusammengefaßt, die MAXWELL Gleichungen [16, 17, 18]. Diese Gleichungen beschreiben die Zusammenhänge zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} , der elektrischen Flußdichte \vec{D} , der magnetischen Flußdichte \vec{B} , der magnetischen Feldstärke \vec{H} , der elektrischen Stromdichte \vec{J} und der elektrischen Raumladungsdichte ρ . Sie lauten in differentieller Form

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.41a)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (2.41b)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2.41c)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (2.41d)$$

Zu den MAXWELL Gleichungen (2.41) kommen noch die Materialbeziehungen, die über die elektrische Permittivität ε , die elektrische Leitfähigkeit κ und die magnetische Permeabilität μ die bereits eingeführten Feldgrößen verknüpfen. Für lineare, nicht dispersive Materialien lauten sie

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (2.42a)$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}, \quad (2.42b)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2.42c)$$

Für diese Arbeit sind die stationären Strömungsfelder von besonderer Bedeutung. Im stationären Fall sind alle Zeitableitungen in den Gleichungen (2.41)

gleich Null. Unter Berücksichtigung der Materialbeziehungen lauten die Gleichungen dann

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.43a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varkappa \vec{E}, \quad (2.43b)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.43c)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.43d)$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung (2.43b) die Divergenz, so erhält man

$$\operatorname{div} \varkappa \vec{E} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0. \quad (2.44)$$

Für das elektrische Feld \vec{E} wird analog zur Elektrostatik der Ansatz

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi \quad (2.45)$$

gewählt. Somit ist Gleichung (2.43a) implizit immer erfüllt. Mit diesem Ansatz erhält man die Differentialgleichung für stationäre Strömungsfelder

$$\operatorname{div} \varkappa \operatorname{grad} \Phi = 0. \quad (2.46)$$

Im allgemeinen hängen die Materialparameter eines Materials von dessen Temperatur ab. Insbesondere wird in dieser Arbeit die elektrische Leitfähigkeit \varkappa als Funktion der Temperatur behandelt,

$$\varkappa = f(T). \quad (2.47)$$

Aus der Lösung der Differentialgleichung (2.46) für Φ wird die Stromdichte \vec{J} bestimmt zu

$$\vec{J} = -\varkappa \operatorname{grad} \Phi. \quad (2.48)$$

Diese elektrische Stromdichte verursacht ein statisches Magnetfeld. Die MAXWELL Gleichungen der Magnetostatik folgen aus den Gleichungen (2.41b) und (2.41d) und lauten

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (2.49a)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.49b)$$

Wählt man für die magnetische Flußdichte \vec{B} den Vektorpotentialansatz

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (2.50)$$

mit \vec{A} als Vektorpotential, so ist Gleichung (2.49b) stets implizit erfüllt. Das Einsetzen des Ansatzes in Gleichung (2.49a) führt zu der Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{J}, \quad (2.51)$$

die für \vec{A} zu lösen ist. Das Einsetzen der Lösung in Gleichung (2.50) liefert schließlich die Lösung für die statische magnetische Flußdichte \vec{B} .

Vor dem Hintergrund der gekoppelten Betrachtung der Fluidodynamik, des thermischen Energietransportes und der Elektrodynamik sind noch zwei weitere Größen von besonderer Bedeutung.

Fließt Strom durch ein Material, das nicht ideal leitfähig ist, also $\varkappa \in \mathbb{R}$, so wird ein Teil der elektrischen Energie in thermische Energie umgewandelt, die JOULEschen Verluste

$$P_w = \vec{E} \cdot \vec{J}. \quad (2.52)$$

Diese sind ein Beitrag zum Quellterm Q_w der Energietransportgleichung (2.26).

Bewegte Ladung in einem Magnetfeld erfährt eine Kraftwirkung, die LOR-ENTZkraft. Demzufolge resultiert aus einer elektrischen Stromdichte \vec{J} in einem Magnetfeld eine LORENTZkraft mit der Kraftdichte

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}. \quad (2.53)$$

Tritt eine elektrische Stromdichte in einem fluiden Medium auf, so muß der Beitrag zur Kraftdichte in der NAVIER-STOKES-Gleichung (2.11) zur Berechnung der Dynamik des Fluides berücksichtigt werden.

2.5 Finite Integration

Für die Simulation der elektrodynamischen Vorgänge und die Berechnung der JOULEschen Verluste sowie der LORENTZkräfte im Rechengebiet wurde eine Diskretisierung mittels der Methode der Finiten Integration (engl. *Finite Integration Technique*, kurz: *FIT*) gewählt [15, 19].

Für die räumliche Diskretisierung der MAXWELL Gleichungen werden in der FIT zwei dual-orthogonale Gitter verwendet. Abbildung 2.2 zeigt eine Zelle des primären Gitters und eine des dualen mit den Bezeichnungen der geometrischen Größen. Die Feldgrößen der MAXWELL Gleichungen (2.41) werden über die jeweils geeignete Gitterkomponente integriert und als integrale Zustandsgröße behandelt. So wird die elektrische Feldstärke über eine Kante des primären Gitters integriert (s. Abb. 2.2), die integrale Zustandsgröße ist dann eine Gitterspannung. Gemäß den Bezeichnungen der Gitterelemente wird die Gitterspannung analog bezeichnet

$$\int_{L_x(n)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \widehat{e}_x(n). \quad (2.54)$$

Die magnetische Flußdichte \vec{B} wird über eine primäre Gitterfläche integriert, so daß sich ein Gitterfluß als integrale Zustandsgröße ergibt,

$$\int_{A_x(n)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \widehat{b}_x(n). \quad (2.55)$$

Die Allokation aller Feldgrößen der FIT ist in Abbildung 2.3 gezeigt. Größen,

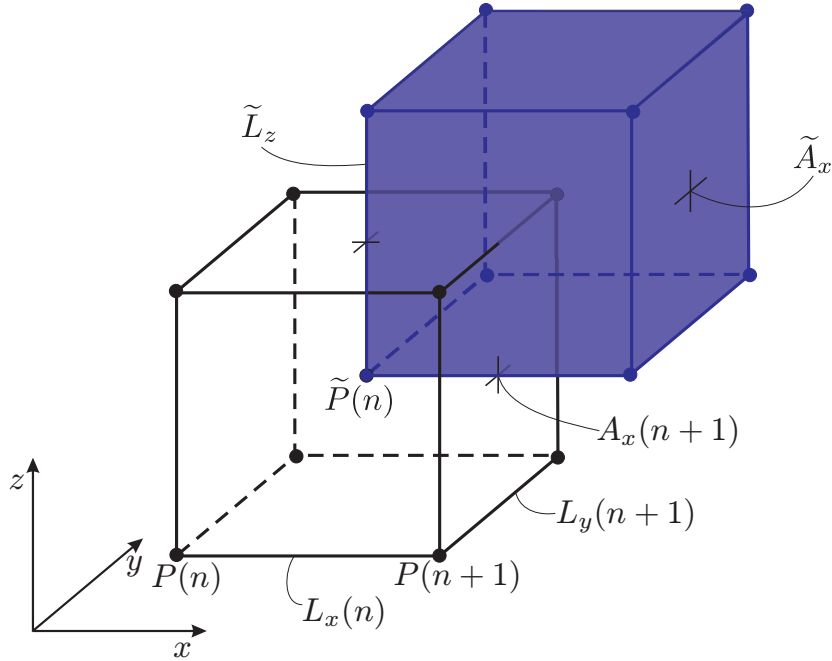


Abbildung 2.2: Primäre und duale Gitterzelle eines Gitters in der FIT. Gezeigt sind die Bezeichnungen der geometrischen Größen in den beiden Gittern. Größen des dualen Gitters werden mit einer Tilde (\sim) gekennzeichnet.

die über eine primäre oder duale Gitterkante integriert werden, sind mit einem Bogen (\frown) gekennzeichnet, solche, die über eine primäre oder duale Gitterfläche integriert werden, werden durch einen Doppelbogen (\frown) bezeichnet.

Zur diskreten Formulierung der MAXWELL Gleichungen müssen die integralen Zustandsgrößen für jede Zelle vorzeichenrichtig im gesamten Rechengebiet addiert werden. Ordnet man alle integralen Zustandsgrößen mit entsprechender Indizierung in endlich dimensionalen Vektoren an, so ergibt sich ein Satz von Matrixgleichungen [15]. Die diskreten MAXWELL Gleichungen lauten dann

$$\mathbf{C}\mathbf{\bar{e}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\bar{b}}, \quad (2.56a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{\bar{h}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\bar{d}} + \mathbf{\bar{j}}, \quad (2.56b)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{\bar{d}} = \mathbf{q}, \quad (2.56c)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{\bar{b}} = 0, \quad (2.56d)$$

wobei \mathbf{q} der Vektor der über die dualen Zellen integrierten Gitterladungen ist. Die rein topologischen Matrizen \mathbf{C} , $\tilde{\mathbf{C}}$, \mathbf{S} , $\tilde{\mathbf{S}}$ beinhalten lediglich die Vorzeichen der Summation und bilden das diskrete Analogon zu den Differentialoperator-

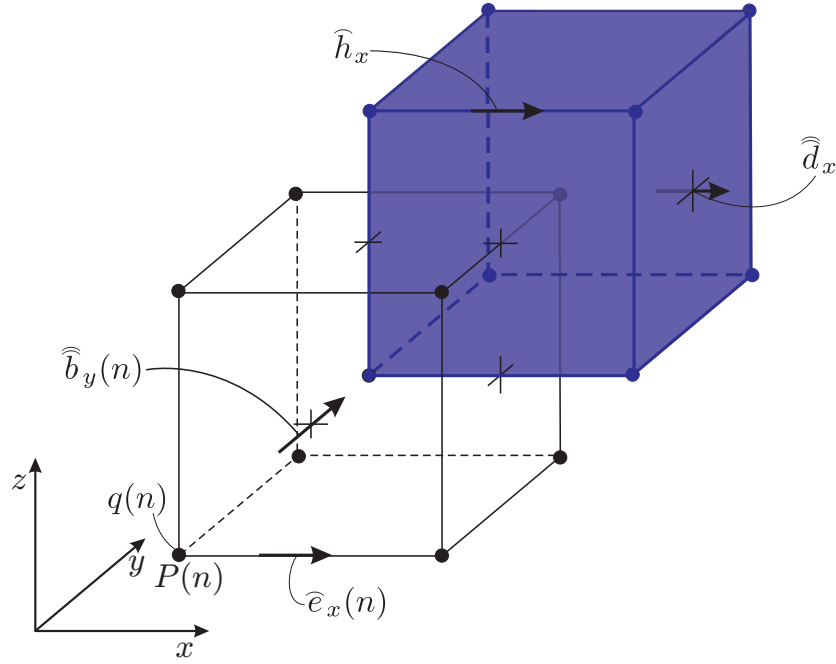


Abbildung 2.3: Allokation der integralen Zustandsgrößen im Gitter.

ren rot und $\text{div} \cdot \mathbf{C}$ und \mathbf{S} operieren auf dem primären Gitter, $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{S}}$ auf dem dualen. Zusätzlich kann ein Gradientenoperator \mathbf{G} analog zu grad aus der Beziehung

$$\mathbf{G} = -\tilde{\mathbf{S}}^T \quad (2.57)$$

definiert werden. Eine besondere Eigenschaft der FIT-Diskretisierung (2.56) ist die exakte Ladungserhaltung der numerischen Lösung [15].

In dieser räumlich diskreten Formulierung der MAXWELL Gleichungen (2.56) ist bislang keine Näherung enthalten. Eine Näherung wird erst in den Materialbeziehungen (2.42) eingeführt [15]. Sie haben in der diskreten FIT-Formulierung die Form

$$\begin{aligned} \hat{\hat{\mathbf{d}}} &= \mathbf{M}_\epsilon \hat{\mathbf{e}}, \\ \hat{\hat{\mathbf{j}}} &= \mathbf{M}_\kappa \hat{\mathbf{e}}, \\ \hat{\hat{\mathbf{b}}} &= \mathbf{M}_\mu \hat{\mathbf{h}}. \end{aligned}$$

Die Materialmatrizen \mathbf{M}_ϵ , \mathbf{M}_κ und \mathbf{M}_μ enthalten sowohl die Information über die Materialverteilung im Rechenggebiet als auch Informationen über die Abmessungen des Gitters. Die Materialmatrizen überführen jeweils eine Gitterspannung in einen Gitterfluß. Beispielsweise wird eine elektrische Gitterspannung zunächst durch die Länge der primären Gitterkante, der sie zugeordnet

ist, dividiert. Dieser Wert wird dann mit einem gemittelten Wert für den Materialparameter ε multipliziert und schließlich mit der Fläche der jeweiligen dualen Gitterfläche multipliziert. Es gilt

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{D}}_A \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{D}_S^{-1}, \quad (2.59)$$

die Matrizen $\tilde{\mathbf{D}}_A$, \mathbf{D}_ε und \mathbf{D}_S^{-1} sind jeweils Diagonalmatrizen, wobei $\tilde{\mathbf{D}}_A$ die dualen Gitterflächen, \mathbf{D}_ε die gemittelten Werte der Permittivität und \mathbf{D}_S^{-1} die Kehrwerte der primären Gitterkanten enthält [15].

Für die diskreten stationären Strömungsfelder vereinfachen sich die MAXWELL Gleichungen analog zu den Gleichungen (2.43) zu

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0}, \quad (2.60a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{M}_\varepsilon \hat{\mathbf{e}}, \quad (2.60b)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\hat{\hat{\mathbf{d}}} = \mathbf{q}, \quad (2.60c)$$

$$\mathbf{S}\hat{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0}. \quad (2.60d)$$

Der elektrische Gitterstrom $\hat{\hat{\mathbf{j}}}$ ergibt sich auch im Diskreten aus einem Gitterpotential Φ

$$\hat{\hat{\mathbf{j}}} = -\mathbf{M}_\varepsilon \mathbf{G} \Phi. \quad (2.61)$$

Die diskreten MAXWELL Gleichungen der Magnetostatik sind

$$\tilde{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{h}} = \hat{\hat{\mathbf{j}}}, \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{S}\hat{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0}. \quad (2.62b)$$

Zur numerischen Lösung eines magnetostatischen Problems ist es analog zum kontinuierlichen Fall möglich, einen Vektorpotentialansatz zu machen. Allerdings existieren für den Fall kartesischer Gitter effizientere Algorithmen, die den Vektorpotentialansatz überflüssig machen. Der H_i -Algorithmus wird in dieser Arbeit zur Lösung des magnetostatischen Problems (2.62) verwendet [20].

Kapitel 3

Gekoppelte Simulation

3.1 Verwendete Codes

Die Untersuchungen dieser Arbeit konzentrieren sich auf die Aspekte der gekoppelten Betrachtung der Probleme. Für die Simulation fluid- und thermodynamischer Vorgänge stand das Programm FASTEST zur Verfügung [5], für elektrodynamische das Programmpaket MAFIA [6]. FASTEST basiert auf dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen Finite-Volumen-Verfahren, MAFIA auf der FIT (s. Abschn. 2.5).

3.1.1 FASTEST

Für eine Simulation mit FASTEST wird das Rechengebiet räumlich mit einem randangepaßten blockstrukturierten Gitter diskretisiert. Auf diesem Gitter wird eine Finite-Volumen-Methode angewendet.

Ein Gittergenerierer ist in FASTEST nicht integriert. Hier kommen neben Eigenentwicklungen auch kommerziell verfügbare Gittergenerierer zum Einsatz.

Für die zeitliche Diskretisierung werden verschiedene Verfahren bereitgestellt, das implizite EULER-Verfahren, das BDF-Verfahren (engl. *Backward-Differencing-Formula*) 2. Ordnung, das CRANK-NICHOLSON-Verfahren sowie zwei RUNGE-KUTTA-Verfahren 3. und 5. Ordnung.

Die Randbedingungen werden jeweils für die Ränder der Blöcke des Gitters angegeben. Dabei wird zwischen Randbedingungen für die Fluidodynamik und die Thermodynamik unterschieden.

Für die Fluidodynamik stellt FASTEST eine Reihe von Randbedingungen zur Verfügung. Für einen Rand eines Blockes kann eine Einstromrandbedingung vorgegeben werden. Dies bedeutet, daß das zweidimensionale normale Geschwindigkeitsprofil des in das Rechengebiet einströmenden Fluides angegeben werden kann.

$$\vec{v}_n = f(\vec{r}). \quad (3.1)$$

Eine Einstromrandbedingung ist zwingend mit einer Ausstromrandbedingung für das Rechengebiet zu kombinieren. Das Geschwindigkeitsprofil am Ausstrom wird in FASTEST berechnet, so daß insbesondere die Massenerhaltung im Rechengebiet gewährleistet ist.

Die Randbedingung der festen Wand wird für Blockgrenzen, die das Strömungsgebiet begrenzen angegeben. An solchen Rändern sind alle Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit Null.

Bildet eine Blockgrenze eine Symmetrieebene der Struktur, die simuliert wird, so bewirkt die Symmetrie-Randbedingung, daß die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit in der Symmetrieebene Null ist.

Ferner kann eine Struktur an einem Rand periodisch fortgesetzt werden. Dies gibt die periodische Randbedingung an. Sie erfordert einen weiteren periodischen Rand an der gegenüberliegenden Seite des Rechengebietes. Die Massenflüsse werden an diesen beiden Rändern bilanziert.

Schließlich wird noch die Randbedingung der Blockverbindung zur Verfügung gestellt. An einem solchen Rand werden die Massenflüsse mit denen des benachbarten Blocks bilanziert.

Eine DIRICHLET-Randbedingung für den Druck ist nicht verfügbar. Eine solche Randbedingung liegt bei einem offenen Abschluß des Strömungsgebietes zum freien Raum hin vor. An einem solchen Rand kann sowohl ein Einstrom als auch ein Ausstrom stattfinden.

Für die Thermodynamik sind ebenso bereits verschiedene Randbedingungen implementiert. Einige wichtige sind im folgenden dargestellt.

Neben der DIRICHLET-Randbedingung für die Temperatur, bei der eine Temperaturverteilung auf dem Rand als Funktion des Ortes vorgegeben werden kann,

$$T = f(\vec{r}),$$

ist die NEUMANN-Randbedingung verfügbar. Dabei wird die Normalenableitung der Temperatur auf dem Rand als Funktion des Ortes vorgegeben

$$\frac{\partial T}{\partial n} = f(\vec{r}).$$

Als Sonderfall der NEUMANN-Randbedingung steht die Symmetrierandbedingung zur Verfügung. In diesem Fall ist die Normalenableitung auf dem betreffenden Rand gleich Null, $\partial T / \partial n = 0$.

Analog zur Fluidodynamik stehen auch für die Thermodynamik die periodische Randbedingung und die Blockverbindung zur Verfügung. Die periodische Randbedingung schließt den betreffenden Rand periodisch an den gegenüberliegenden Rand des Rechengebietes an, so daß zwischen den Rändern ein konvektiver und diffusiver Wärmeaustausch berechnet wird. Ebenso wird der konvektive und diffusive Wärmeaustausch zwischen Blöcken berechnet, zwischen denen eine Blockverbindung besteht.

Die Materialeigenschaften werden in eigens dafür vorgesehenen Benutzerrou-tinen angegeben, ebenso Rand- und Startwerte. Weiter sind für den Benutzer

Schnittstellen vorgesehen, die es erlauben, an verschiedenen Stellen in den Programmablauf einzugreifen, z. B. vor jedem Zeitschritt. Folglich muß der Code bei jeder Änderung in diesen Routinen neu kompiliert werden.

Die Visualisierung und Auswertung der Berechnungsergebnisse wird wiederum mit Software von Drittanbietern durchgeführt.

FASTEST wird seit vielen Jahren zur Simulation von fluid- und thermodynamischen Vorgängen genutzt und ist gut erprobt.

Eine gekoppelte Simulation, wie sie im Rahmen dieser Arbeit erfolgte, war in FASTEST nicht vorgesehen. Entsprechend mußte der Code an die Erfordernisse der jeweiligen Kopplungsschnittstelle (s. Abschn. 3.6) angepaßt werden.

3.1.2 MAFIA

MAFIA basiert auf der Finiten-Integrations-Technik (s. Abschn. 2.5).

Zur räumlichen Diskretisierung des Rechengebietes stehen neben dem orthogonalen Gitter noch zylindrische Gitter und solche in Kugelkoordinaten zur Verfügung. Im Rahmen dieser Arbeit wurden nur orthogonale Gitter verwendet. Das gesamte Rechengebiet wird mit einem dual-orthogonalen Gitterpaar diskretisiert. Mehrblöckige Gitter finden in MAFIA keine Anwendung.

Das Programmpaket MAFIA ist in verschiedene Module aufgeteilt. Darunter befinden sich ein Gittergenerierer und ein Post-Prozessor. Weiterhin sind Module für die verschiedenen Typen elektrodynamischer Probleme vorhanden, so u. a. für statische Probleme, für Zeitbereichssimulationen oder für Simulationen im Frequenzbereich.

Für die verschiedenen Problemtypen werden eine Reihe von Randbedingungen zur Verfügung gestellt. Davon sind für diese Arbeit für stationäre Strömungsfelder zwei Bedingungen für das elektrische Feld relevant, einmal die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes verschwinden $E_t = 0$, zum anderen die Normalkomponenten werden zu Null $E_n = 0$. Die gleichen Bedingungen finden auch für das magnetostatische Problem Anwendung, $H_t = 0$ und $H_n = 0$.

Materialeigenschaften, Rand- und Anfangsbedingungen werden interaktiv oder über ein Skript angegeben. Dabei war die für diese Arbeit relevante temperaturabhängige Betrachtung der elektrischen Leitfähigkeit nicht vorgesehen. Dies wurde daher im Rahmen dieser Arbeit implementiert.

MAFIA ist ebenfalls ein gut erprobter Code, der seit vielen Jahren für elektromagnetische Simulationen genutzt wird.

3.2 Berechnung der Kopplungsgrößen in der FIT

Wie in Abschnitt 2.4 erläutert, sind die beiden Kopplungsgrößen des elektromagnetischen Teilproblems, die bei den fluid- und thermodynamischen Berechnungen zu berücksichtigen sind, die JOULEschen Verluste P_w und die LORENTZkraftdichte \vec{f} . Die Finite Volumen-Methode verlangt diese Größen als volumengemittelte Größen. Die Einheiten sind entsprechend W/m^3 für die JOULEschen Verluste und N/m^3 für die LORENTZkraftdichte.

Die JOULEschen Verluste im Rechengebiet werden gemäß Gleichung (2.52) aus der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der elektrischen Stromdichte \vec{J} bestimmt. In der FIT liegen diese Größen als integrale Zustandsgrößen integriert über eine Kante bzw. eine Fläche des Gitters vor (s. Abschn. 2.5). Die JOULEschen Verluste werden daher jeweils für die dualen Zellen des Gitters ermittelt und mit q bezeichnet. Diese Werte haben die Einheit Watt und nähern die über das Volumen der dualen Zelle aufintegrierte Leistungsdichte. Es handelt sich also um Größen, die von den Gitterabmessungen abhängen. Diese Werte werden durch das Volumen der dualen Zelle dividiert, um zu einer Näherung der Leistungsdichte zu gelangen. Die so erhaltenen Werte q_w sind Mittelwert-Zustandsgrößen der kontinuierlichen Wärmequellendichte im Rechengebiet für die dualen Zellen. Sie sind in den Knoten des primären Gitters allokiert und werden bei der Übertragung auf das Gitter in FASTEST auf dieses interpoliert. Um die gleiche Interpolation auch für die LORENTZkraftdichte verwenden zu können, müssen auch die Komponenten der Kraftdichte in den primären Gitterknoten allokiert sein.

Die Berechnung der Dichte der LORENTZkräfte erfolgt aus der elektrischen Stromdichte \vec{J} und der magnetischen Flußdichte \vec{B} (Gl. (2.53)). Die zugehörigen integralen Zustandsgrößen \hat{j} und \hat{b} sind auf den dualen bzw. primären Gitterflächen allokiert. Ihre Einheiten sind die Einheit des elektrischen Stroms A und die des magnetischen Flusses Vs. Zur Berechnung der LORENTZkräfte werden die integralen Zustandsgrößen \hat{j} und \hat{b} durch die Gitterfläche, auf der sie allokiert sind, dividiert, um so zu Mittelwert-Zustandsgrößen j^* und b^* zu gelangen. Diese werden dann, wie in Abbildung 3.1 gezeigt, auf die primären Gitterpunkte interpoliert. Somit liegen in jedem Gitterpunkt Näherungen der Komponenten der Vektoren \vec{J} und \vec{B} als Mittelwert-Zustandsgrößen j_x, j_y, j_z bzw. b_x, b_y, b_z vor. Aus diesen Größen wird dann das Kreuzprodukt gemäß

$$\begin{aligned} f_x &= j_y b_z - j_z b_y, \\ f_y &= j_z b_x - j_x b_z, \\ f_z &= j_x b_y - j_y b_x \end{aligned}$$

berechnet, so daß schließlich Mittelwert-Zustandsgrößen der drei Komponenten der LORENTZkraftdichte in jedem Gitterpunkt bekannt sind. Diese Werte werden direkt zur Übertragung auf das Gitter, das für den fluid- und thermodynamischen Teil der Simulation benutzt wurde, verwendet. Dabei wurde die gleiche Interpolation wie für die Übertragung der Wärmequellendichte verwendet.

3.3 Interpolation

Die physikalischen Größen, die für die gekoppelten Simulationen relevant sind, sind bei MAFIA in den Knoten des Gitters allokiert. In FASTEST sind die physikalischen Größen in den Zentren der Kontrollvolumina allokiert. Folglich bilden die Zellzentren die Knoten des Gitters, das für die Kopplung benutzt wird.

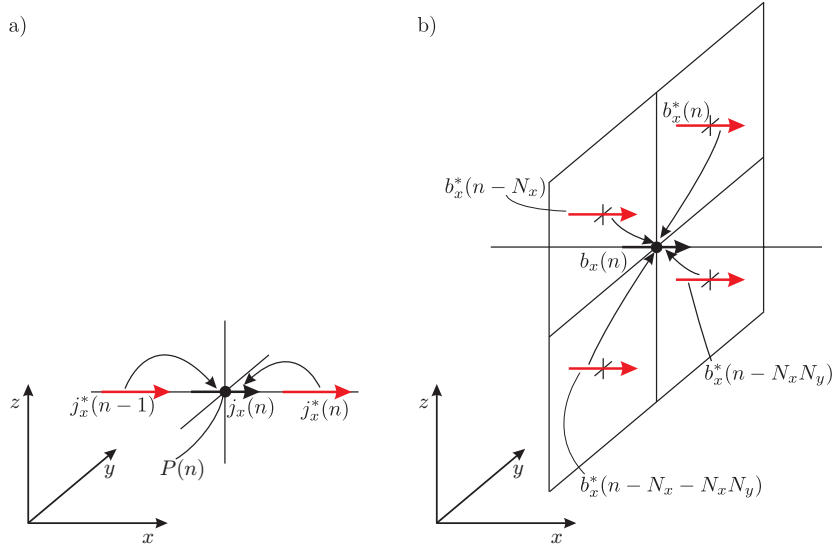


Abbildung 3.1: Berechnung der spezifischen Kraft in einem Gitterpunkt. Teil a) zeigt die Interpolation der Stromdichten und b) die der magnetischen Flußdichten. Die Ausgangsgrößen sind jeweils in rot dargestellt.

Zur Interpolation der Größen zwischen den Gittern kommen verschiedene Verfahren in Frage. Die im Rahmen dieser Arbeit näher untersuchten Verfahren unterscheiden sich in der Ordnung des Interpolationsfehlers. Demzufolge läßt der Einsatz der verschiedenen Verfahren qualitative Unterschiede bei der Lösung erwarten.

In dieser Arbeit wurden die Nächster-Nachbar- (engl. *nearest neighbour interpolation*), die SHEPARD- und die trilineare Interpolation untersucht.

Alle drei Verfahren erfordern eine Kenntnis der Lage der beiden Gitter zueinander. Für jeden Knoten eines Gitters muß bekannt sein, in welcher Zelle des anderen Gitters dieser liegt. Es muß eine Gitterzuordnung (engl. *grid mapping*) erfolgen.

3.3.1 Gitterzuordnung

Als vorbereitender Schritt zu einer Simulation werden die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Gittern ermittelt. Da die Gitter während einer Simulation nicht mehr verändert werden, muß dieser Arbeitsschritt nur einmal zu Beginn einer Simulation ausgeführt werden. Die Suche stellt die reziproken Gitterzuordnungen fest. Für die Übertragung der Ergebnisse aus FASTEST nach MAFIA wird das FASTEST-Gitter als Quellgitter betrachtet und entsprechend das MAFIA-Gitter als Zielgitter. Die Rollen von Quell- und Zielgitter sind folglich für die Ergebnisübertragung in die Gegenrichtung vertauscht.

Zunächst wird das MAFIA-Gitter als Quell- und das FASTEST-Gitter als Zielgitter betrachtet. In Abbildung 3.2 ist eine mögliche Konstellation für zwei Gitter gezeigt. Der Suchalgorithmus, der die Nachbarschaftsbeziehungen der

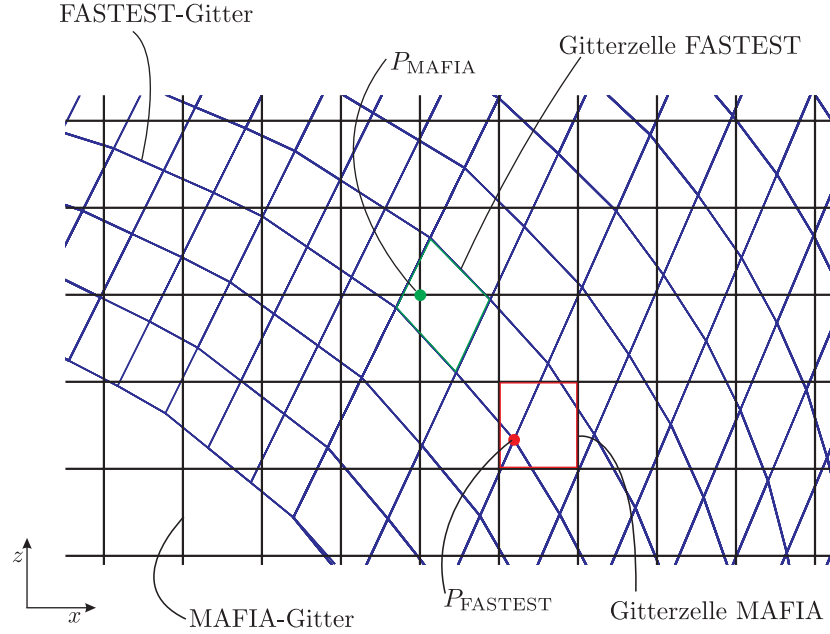


Abbildung 3.2: 2D-Beispiel der Gitterzuordnung zwischen einem MAFIA-Gitter (schwarz) und einem FASTEST-Gitter (blau). Im gezeigten Beispiel wird dem rot markierten Gitterknoten des FASTEST-Gitters die rot markierte Gitterzelle des MAFIA-Gitters zugeordnet. Reziprok erfolgt die Zuordnung des grünen MAFIA-Punktes zur grünen FASTEST-Zelle.

beiden Gitter feststellt, muß also jeden Knoten des FASTEST-Gitters einer Gitterzelle des Gitters in MAFIA zuordnen. Aufgrund der Orthogonalität der MAFIA-Gitter kann die Suche des FASTEST-Knotens in jede Raumrichtung separat erfolgen. Dabei wird für jeden Knoten sequentiell jeweils der Gitterzwischenraum bestimmt, in dem der Knoten liegt. Mit den Gitterschritten in jede Richtung, die den Knoten enthalten, ist dann die Gitterzelle des MAFIA-Gitters eindeutig bestimmt.

Aufwendiger ist die Suche der Knoten des MAFIA-Gitters in den Zellen des FASTEST-Gitters. Die Gitterzellen in FASTEST sind allgemeine Hexaeder. Für jeden MAFIA-Knoten muß festgestellt werden, ob er inn- oder außerhalb eines Kontrollvolumens des Gitters in FASTEST liegt. Für diese Suche wurden zwei verschiedene Algorithmen verwendet.

Das erste Verfahren führt eine sequentielle Suche über die Kontrollvolumen des FASTEST-Gitters durch. Dazu wird eine Datenstruktur aufgebaut, in der

jede FASTEST-Zelle als Hexaeder mit orientierten Flächen abgelegt ist. Es wird berücksichtigt, daß die Gitter in FASTEST blockstrukturiert sind. Für die Zellen eines Blockes wird ein kleinstmöglicher Quader definiert, der alle Zellen dieses Blockes beinhaltet (engl. *bounding box*). Bei der folgenden Ortsbestimmung eines MAFIA-Punktes im FASTEST-Gitter wird zunächst überprüft, ob der Punkt innerhalb dieses Quaders liegt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird die Prüfung für den nächsten Quader, der dann einen anderen Block umschließt, wiederholt. Auf diese Weise wird die Suche erheblich beschleunigt.

Ist der Quader, der den Zielknoten enthält, gefunden, werden alle Quellelemente des zugehörigen Gitterblocks nacheinander überprüft, ob sie den Zielknoten enthalten.

Außerdem kam ein *Bucket*-Verfahren zum Einsatz [21]. Mit dem Verfahren werden zunächst all jene Punkte bestimmt, die in der Nähe einer Zelle liegen. Die aufwendige Prüfung, ob ein Punkt innerhalb einer Zelle liegt wird dann nur für diese Punkte in der Nähe der Zelle ausgeführt.

Das *Bucket*-Verfahren ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Das gesamte Rechengebiet wird mit einem orthogonalen äquidistanten Gitter, den *Buckets*, in der Abbildung 3.3 schwarz, aufgelöst. Zunächst werden dann die Zielknoten den *Buckets* zugeordnet (in Abb. 3.3 grau). Dies geschieht wie die zuvor beschriebene Suche von Zielknoten in orthogonalen Gittern. Die Quellelemente (in Abb. 3.3 blau) werden jeweils mit einer *Bounding-Box* (grün) umschrieben. Schließlich werden die Beziehungen zwischen den *Bounding-Boxen* und den *Buckets* hergestellt. Die eigentliche Prüfung, ob ein Punkt innerhalb eines Quellelements liegt, wird dann auf diejenigen Punkte und Elemente beschränkt, die in den erläuterten Beziehungen zu den *Buckets* Gemeinsamkeiten aufweisen. Dieser Algorithmus ist sehr effizient. Insbesondere bei den in dieser Arbeit auftretenden Gittern mit mehreren hunderttausend Gitterknoten ermöglicht er ein rasches Ermitteln der Gitterbeziehungen innerhalb weniger Sekunden. Zudem wird die Gitterzuordnung nur einmal zu Beginn einer gekoppelten Simulation erstellt. Sie ist daher unkritisch für die Effizienz der vollständigen Simulation.

3.3.2 Nächster-Nachbar-Interpolation

Bei der Nächster-Nachbar-Interpolation (engl. *nearest neighbour interpolation*) wird derjenige Knoten $P_n(x_n, y_n, z_n)$ des Quellelements ermittelt, zu dem der Zielknoten $P_Z(x_z, y_z, z_z)$ den geringsten euklidischen Abstand aufweist (s. Abb. 3.4). Der Wert der interpolierten Größe $\Phi(x, y, z)$ in diesem Quellelementknoten wird auf den Zielknoten übertragen,

$$\Phi(x_z, y_z, z_z) = \Phi(x_n, y_n, z_n). \quad (3.2)$$

Vektorielle physikalische Größen werden komponentenweise betrachtet.

Lediglich die Konstantenfunktion kann mit dieser Interpolation fehlerfrei von einem auf das andere Gitter übertragen werden. Folglich ist dieses einfache Interpolationsverfahren konvergent von der Ordnung $p = 1$.

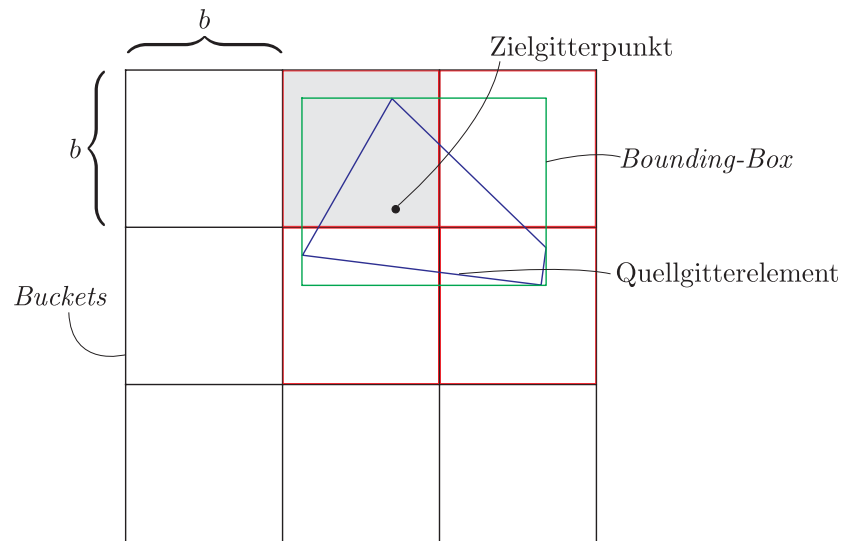


Abbildung 3.3: Das *Bucket-Verfahren*. Gitterpunkt des Zielgitters schwarz, Element des Quellgitters (blau) mit *Bounding-Box* (grün) in einem Gitter aus *Buckets* der Größe b . Der Punkt wird dem grauen *Bucket* zugeordnet. Das Quellelement hat aufgrund seiner *Bounding-Box* eine Beziehung zu den roten *Buckets*. Der Gitterpunkt und das Gitterelement haben über den grauen *Bucket* eine gemeinsame Beziehung.

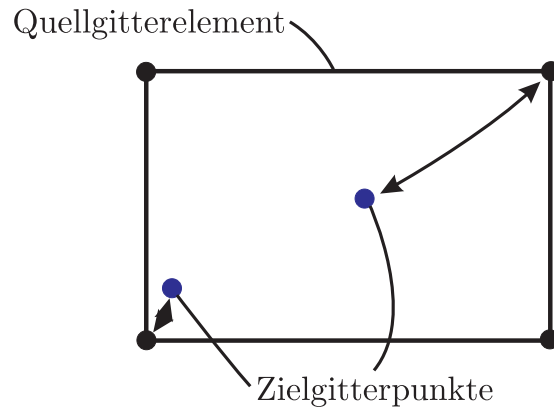


Abbildung 3.4: Zuordnung bei der Nächster-Nachbar-Interpolation. Im gezeigten Beispiel liegen zwei Knoten des Zielgitters (blau) in der gezeigten Zelle des Quellgitters (schwarz). Die Zielknoten werden jeweils dem Quellpunkt, zu dem sie den geringsten euklidischen Abstand haben, zugeordnet.

Dieses Interpolationsverfahren wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht eigens implementiert. Es wird hier erläutert, da es in MpCCI zum Einsatz kommt (s. Abschn. 3.6.2).

3.3.3 Trilineare Interpolation

Eine bessere Genauigkeit läßt eine trilineare Interpolation erwarten. Diese ermöglicht die exakte Darstellung linearer Funktionen. Die Interpolation von den acht Knoten eines Quellelements auf den im Innern der Zelle liegenden Zielknoten erfolgt in Einheitswürfeln. Dazu wird das Quellelement in einen Einheitswürfel transformiert [23]. In Abbildung 3.5 ist ein allgemeines Quellelement mit Zielknoten und der Einheitswürfel mit dem transformierten Zielknoten dargestellt. Die Annahme, daß ein Knoten des Quellelements im Koordinatenursprung

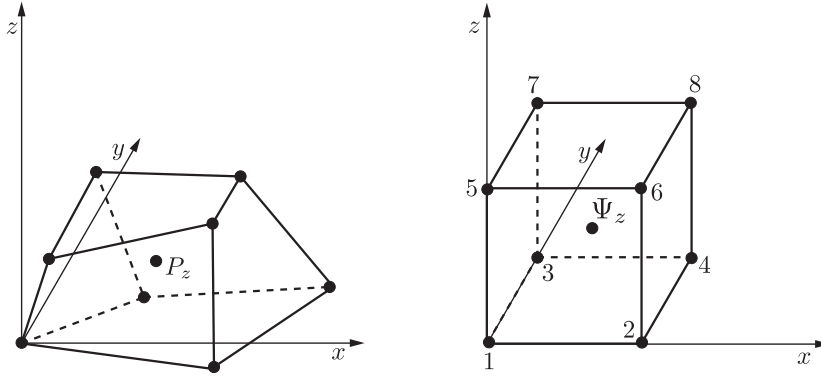


Abbildung 3.5: Quellelement mit Zielknoten P_z und Einheitswürfel mit transformiertem Zielknoten Ψ_z .

liegt, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit. Dies kann durch eine lineare Translation der Zelle immer erreicht werden.

Die Koordinaten der Quellknoten werden mit $P_i(x_i, y_i, z_i)$ bezeichnet, der Index i gibt die Nummer des Knotens an, die Nummerierung ist in Abbildung 3.5 gegeben. Für die Bezeichnung der transformierten Koordinaten wird $\Psi_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ gewählt. Die Transformation erfolgt gemäß

$$\begin{aligned} x_i &= a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \eta_i + a_3 \zeta_i + a_4 \xi_i \eta_i + a_5 \xi_i \zeta_i + a_6 \eta_i \zeta_i + a_7 \xi_i \eta_i \zeta_i \\ y_i &= b_0 + b_1 \xi_i + b_2 \eta_i + b_3 \zeta_i + b_4 \xi_i \eta_i + b_5 \xi_i \zeta_i + b_6 \eta_i \zeta_i + b_7 \xi_i \eta_i \zeta_i \\ z_i &= c_0 + c_1 \xi_i + c_2 \eta_i + c_3 \zeta_i + c_4 \xi_i \eta_i + c_5 \xi_i \zeta_i + c_6 \eta_i \zeta_i + c_7 \xi_i \eta_i \zeta_i, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei a_j, b_j, c_j für $j = 0, \dots, 7$ die Transformationskoeffizienten sind. Mit den bekannten Koordinaten der acht Quellknoten werden diese bestimmt. Schließlich können die transformierten Koordinaten für den Zielknoten im Einheitswürfel

$\Psi_z(\xi_z, \eta_z, \zeta_z)$ bestimmt werden. Die physikalische Größe Φ wird dann gemäß

$$\begin{aligned} \Phi_z(\xi_z, \eta_z, \zeta_z) = & \Phi_1 (1 - \xi_z)(1 - \eta_z)(1 - \zeta_z) + \Phi_2 \xi_z (1 - \eta_z)(1 - \zeta_z) + \\ & + \Phi_3 (1 - \xi_z) \eta_z (1 - \zeta_z) + \Phi_4 \xi_z \eta_z (1 - \zeta_z) + \\ & + \Phi_5 (1 - \xi_z)(1 - \eta_z) \zeta_z + \Phi_6 \xi_z (1 - \eta_z) \zeta_z + \\ & + \Phi_7 (1 - \xi_z) \eta_z \zeta_z + \Phi_8 \xi_z \eta_z \zeta_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

bestimmt, wobei Φ_i der Wert der Größe im i -ten Knoten des Quellelements ist. Handelt es sich bei der physikalischen Größe um eine vektorielle Größe, werden die drei Komponenten jeweils gemäß Gleichung (3.4) interpoliert.

3.3.4 SHEPARD-Interpolation

Die Shepard-Interpolation wurde von DONALD SHEPARD 1968 vorgestellt [24]. Das Verfahren ermöglicht die Interpolation von Daten von beliebig im Raum verteilten Punkten auf einen Zielknoten. Bei der Erläuterung der Motivation für sein Verfahren geht SHEPARD davon aus, daß Daten in einem gegebenen Gebiet in Form einer stetigen, einmal differenzierbaren Funktion vorliegen müssen. Als Beispiel führt er an, daß Daten unterschiedlicher Quellen in einem bestimmten Gebiet verglichen werden müssen oder diskrete Daten kontinuierlich graphisch dargestellt werden sollen. In diesen Fällen ist eine Interpolation notwendig.

In dieser Arbeit wird die SHEPARD-Interpolation auf Datenpunkte angewendet, die dreidimensional im Raum verteilt sind. Von den acht Knoten eines Quellelements wird gemäß

$$\Phi_z(x_z, y_z, z_z) = \frac{\sum_{i=1}^8 \frac{\Phi_i}{d(P_z, P_i)^n}}{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{d(P_z, P_i)^n}} \quad (3.5)$$

auf den Zielknoten P_z interpoliert, $d(P_z, P_i)$ ist die euklidische Distanz zwischen dem Zielknoten P_z und dem i -ten Eckknoten des Quellelements, ansonsten sind die Bezeichnungen analog zu Gleichung (3.4). Die Behandlung von vektoriellen Größen wird komponentenweise durchgeführt. In dieser Arbeit wurde $n = 2$ gewählt. Höhere Werte für n flachen die interpolierte Funktion in der Nähe der Stützstellen stark ab und führen zwischen den Stützstellen zu großen Gradienten [25].

Um die Fehlerordnung des Verfahrens zu betrachten, wird die Funktion der Ausgangsgröße als TAYLORreihe dargestellt,

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) &= \Phi(x_0, y_0, z_0) + \\
&+ \frac{\partial \Phi(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial \Phi(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} (y - y_0) + \\
&+ \frac{\partial \Phi(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} (z - z_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x_0, y_0, z_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(x_0, y_0, z_0)}{\partial z^2} (z - z_0)^2 + \dots = \\
&= \Phi(x_0, y_0, z_0) + \Phi^*(x, y, z).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Die abkürzende Schreibweise mit Φ^* wird der Übersichtlichkeit halber eingeführt. Durch die Anwendung der Interpolation (3.5) auf diese Funktion (3.6) ergibt sich für die interpolierte Zielfunktion

$$\Phi_z(x_z, y_z, z_z) = \Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\sum_{i=1}^8 \frac{\Phi^*(x_i, y_i, z_i)}{d(P_z, P_i)^n}}{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{d(P_z, P_i)^n}}. \tag{3.7}$$

Ergo können mit der SHEPARD-Interpolation nur Konstanten-Funktionen exakt abgebildet werden [26].

Das SHEPARD-Verfahren zeichnet sich durch seine hohe Flexibilität insbesondere bei der Interpolation von stark verstreut vorliegenden Daten (engl. *scattered data*) aus. In der Praxis kommen sehr häufig Modifikationen der ursprünglich von SHEPARD als abstandsgewichtetes Verfahren vorgestellten Methode zum Einsatz [27, 28, 29].

3.3.5 Konvergenzuntersuchung der Interpolationsverfahren

Zur Untersuchung der Konvergenz der Interpolationsverfahren werden die Knoten eines Quellgitters mit Werten gemäß

$$f(x, y, z) = e^{(1+x)(1+y)(1+z)} \tag{3.8}$$

vorbelegt. Diese Exponentialfunktion ist nicht periodisch und kann in jede Raumrichtung durch eine Reihe dargestellt werden.

Die Interpolation wird für verschiedene Quellgitter durchgeführt. Jeweils wird das größte Quellgitter sukzessive verfeinert. Die Gitterzellen werden bei jeder Verfeinerung in alle drei Raumrichtungen halbiert. Als größtes Ausgangsgitter wurden ein äquidistantes und ein unregelmäßiges orthogonales Gitter verwendet. Die Gitterlinien des unregelmäßigen Gitters wurden willkürlich gewählt.

Auf dem Zielgitter wird dann jeweils der relative quadratische Mittelwert ε des Interpolationsfehlers über alle Zielknoten ausgewertet,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N_p} \sum_{n=1}^{N_p} \left(\frac{\Phi(n) - f_n}{f_n} \right)^2}, \quad (3.9)$$

wobei N_p die Anzahl der Gitterknoten des Zielgitters ist, $\Phi(n)$ der interpolierte Wert im n -ten Knoten, f_n der Wert von f gemäß Gleichung (3.8) im n -ten Knoten.

Das Ergebnis der Untersuchung für die trilineare Interpolation ist in Abbildung 3.6 gezeigt. Erwartungsgemäß ist die Konvergenz von der Ordnung $p = 2$.

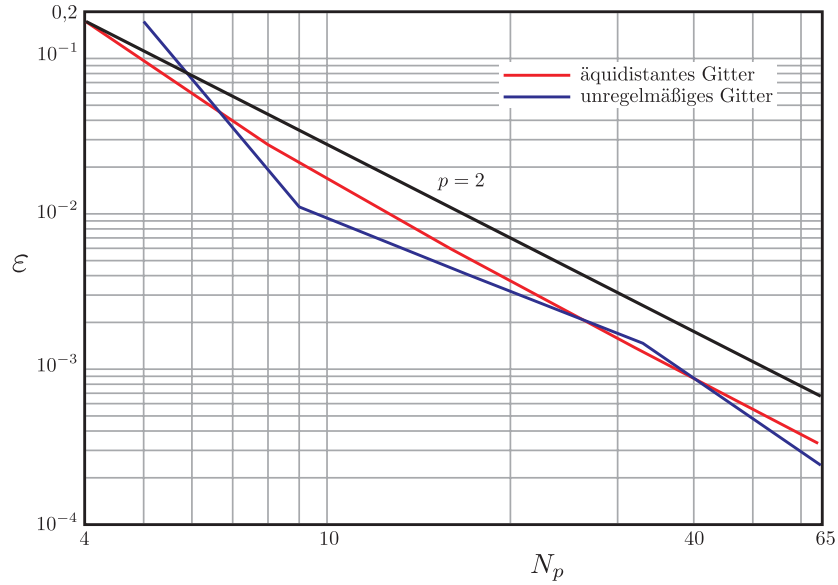


Abbildung 3.6: Konvergenz der trilinearen Interpolation. Das Quellgitter besitzt in jede Raumrichtung N_p Gitterknoten. Bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens auf einem unregelmäßigen Gitter werden ausgehend vom größten unregelmäßigen Gitter bei jeder Verfeinerung die Gitterzellen in alle Raumrichtungen halbiert. Auf dem Zielgitter wird jeweils das relative quadratische Mittel der Interpolationsfehler über alle Gitterpunkte ermittelt (Gl. (3.9)). Erwartungsgemäß ist die Konvergenz des Verfahrens von der Ordnung $p = 2$.

Die Untersuchung der Konvergenz des SHEPARD-Verfahrens zeigt ebenso das erwartete Ergebnis einer Konvergenz von der Ordnung $p = 1$. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.7 gezeigt.

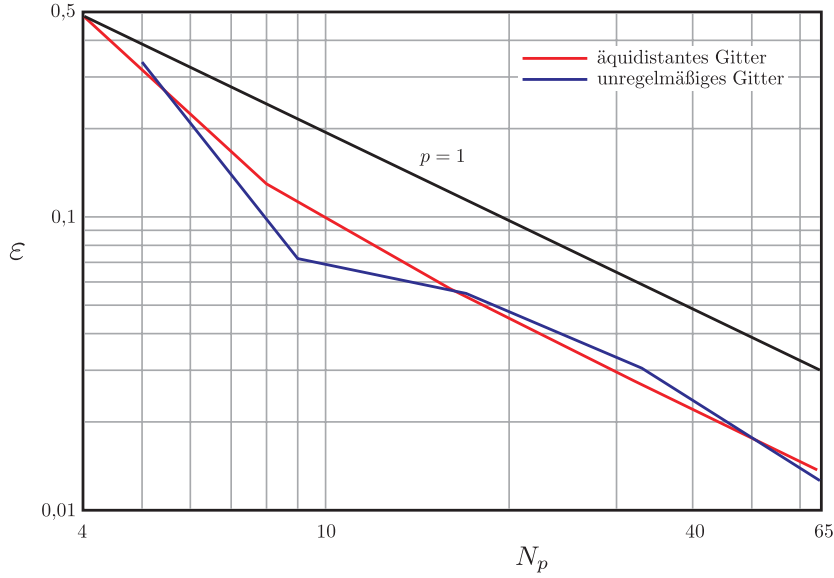


Abbildung 3.7: Konvergenz der SHEPARD-Interpolation. Das Quellgitter besitzt in jede Raumrichtung N_p Gitterknoten. Bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens auf einem unregelmäßigen Gitter werden ausgehend vom größten unregelmäßigen Gitter bei jeder Verfeinerung die Gitterzellen in alle Raumrichtungen halbiert. Auf dem Zielgitter wird jeweils das relative quadratische Mittel der Interpolationsfehler über alle Gitterpunkte ermittelt (Gl. (3.9)). Erwartungsgemäß ist die Konvergenz des Verfahrens von der Ordnung $p = 1$.

3.4 Gekoppeltes Gleichungssystem

Die in dieser Arbeit untersuchten Probleme erfordern eine gekoppelte Betrachtung der fluid-, thermo- und elektrodynamischen Prozesse. Die NAVIER-STOKES-Gleichung (2.11), die Differentialgleichung des thermischen Energietransportes (2.26), die Differentialgleichung des stationären elektrischen Strömungsfeldes (2.46) und die Differentialgleichung der Magnetostatik (2.51) sind als System von gekoppelten Differentialgleichungen zu lösen. Die zusätzlichen Größen, die aufgrund des gekoppelten Charakters des Problems in der NAVIER-STOKES-Gleichung (2.11) und der Differentialgleichung des thermischen Energietransportes (2.26) zusätzlich zu berücksichtigen sind, gehen jeweils in die rechte Seite der Gleichungen ein. Hingegen werden die Differentialgleichung des stationären elektrischen Strömungsfeldes (2.46) und die der Magnetostatik (2.51) nichtlinear. In der diskretisierten Form ergibt sich schließlich eine nichtlineare Systemmatrix. Es ergeben sich algebraische Gleichungen der Form [10]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(\mathbf{x}_f) & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}(\mathbf{x}_f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

dabei bezeichnet \mathbf{x}_f die Unbekannten des fluid- und thermodynamischen Teilproblems, \mathbf{x}_e die des elektrodynamischen; die mit **1** und **2** indizierten Größen sind die entsprechenden Anteile der Systemmatrix und der rechten Seiten, wie sie sich aus der Zerlegung des gekoppelten Systems ergeben.

Zur Lösung des Systems (3.10) gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen kann das System als ein nichtlineares Gleichungssystem mit dem Vektor $(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_e)^T$ als Unbekannter gesehen und direkt gelöst werden. Bei der Verwendung eines iterativen Lösungsverfahrens bietet dies den Vorteil einer raschen Konvergenz der Lösung. Ein Nachteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß der Speicherbedarf aufgrund der großen Systemmatrix sehr hoch ist. Ein weiterer Nachteil ist, daß bei dieser Betrachtungsweise ein eigener spezieller Code zur Lösung genau dieses System zu entwickeln ist. Dieser Code kann dann nur für die Simulation eines Vorgangs, der durch das System (3.10) beschrieben wird, verwendet werden.

Die andere Möglichkeit besteht in einem partitionierten Ansatz. Bei diesem werden die beiden Teilprobleme jeweils mit einem eigenen Code gelöst. Die Teillösungen werden durch eine geeignete Kopplung verknüpft. Der Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, daß für die Lösungen der Teilprobleme Codes, die bereits gut erprobt sind, verwendet werden können. Der zusätzlich zu leistende Aufwand liegt in der Implementierung eines geeigneten Kopplungscodes. Dieser muß die Aufgabe der zeitlichen Synchronisation der beiden speziellen Codes sowie der Datenübertragung der Kopplungsgrößen zwischen den Codes leisten. Bei der zeitlichen Synchronisation sind Erfordernisse der Zeitdiskretisierung und der Grad der Kopplung der Differentialgleichungen zu berücksichtigen.

Da im Rahmen dieser Arbeit zwei getrennte Softwarepakete für die Lösung des fluid- und thermodynamischen Teilproblems einerseits und des elektrodynamischen andererseits verwendet wurden, wurde der partitionierte Ansatz zur Lösung des Systems benutzt. Das heißt, für die Unbekannten des elektrodynamischen Problems werden zunächst die Lösungen der letzten Iteration $\mathbf{x}_e^{(k)}$ benutzt und die Gleichung

$$\mathbf{A}_{11}(\mathbf{x}_f^{(k+1)}) \mathbf{x}_f^{(k+1)} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_e^{(k)} \quad (3.11)$$

für $\mathbf{x}_f^{(k+1)}$ gelöst. Die Nichtlinearität wird in FASTEST mittels einer PICARD-Iteration linearisiert. Anschließend wird diese Lösung verwendet, um

$$\mathbf{A}_{22}(\mathbf{x}_f^{(k+1)}) \mathbf{x}_e^{(k+1)} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_f^{(k+1)} \quad (3.12)$$

für $\mathbf{x}_e^{(k+1)}$ zu lösen. Anschließend wird diese neue Lösung $\mathbf{x}_e^{(k+1)}$ in Gleichung (3.11) eingesetzt, um eine Korrektur für $\mathbf{x}_f^{(k+2)}$ zu finden. Diese Iteration wird wiederholt, bis Konvergenz in \mathbf{x}_f und \mathbf{x}_e erreicht ist. Das Abbruchkriterium der Iteration ist im allgemeinen problemabhängig. Die konkrete Implementierung des Abbruchkriteriums wird in Abschnitt 3.5 näher erläutert.

In der Praxis sind bei der Betrachtung von fluiddynamisch, thermisch und elektromagnetisch gekoppelten Aufgaben sowohl stationäre als auch transiente Vorgänge von Bedeutung. Insbesondere für transiente Simulationen muß die Kopplungsprozedur in jedem Zeitschritt eingesetzt werden.

3.5 Kopplungsalgorithmus

Zur Simulation eines stationären Problems sind die stationäre NAVIER-STOKES-Gleichung (2.16), die Differentialgleichung des thermischen Energietransportes im stationären Fall (2.28), die Differentialgleichung des stationären elektrischen Strömungsfeldes (2.46) und die Differentialgleichung der Magnetostatik (2.51) gekoppelt zu lösen. Der hier gewählte Algorithmus ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

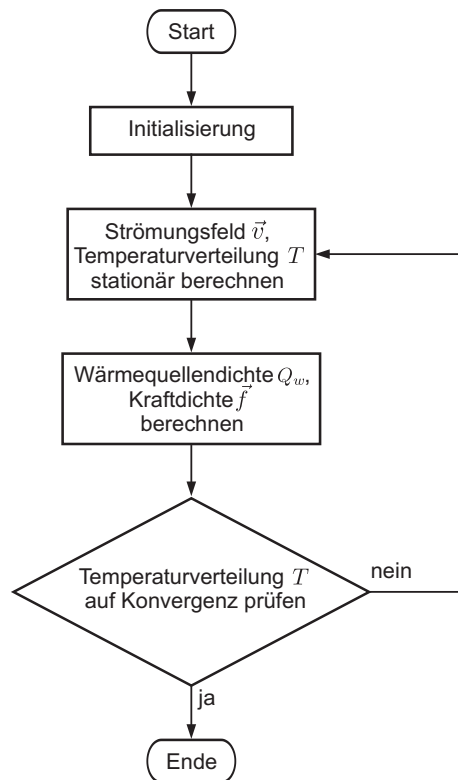


Abbildung 3.8: Ablauf einer stationären Simulation.

Nach dem Start der Simulation werden FASTEST und MAFIA initialisiert. Die von FASTEST vorgegebene Anfangstemperaturverteilung $T^{(0)}$ wird in MAFIA übernommen. Damit ermittelt MAFIA die Ausgangsverteilung der Wärmequellendichte $Q_w^{(0)}$ und der Kraftdichte im Rechenggebiet $\vec{f}^{(0)}$. In FASTEST wird das Problem stationär gelöst. Als Ergebnis steht eine neue Temperaturverteilung $T^{(1)}$. MAFIA bestimmt aus dieser Temperaturverteilung eine neue Wärmequellendichte $Q_w^{(1)}$ und Kraftdichte $\vec{f}^{(1)}$. Diese dienen wiederum als Grundlage für die nächste Lösung in FASTEST $T^{(2)}$ usw.

Zur Überprüfung der Konvergenz dieser Fixpunktiteration wird die Temperaturverteilung aus zwei aufeinander folgenden Iterationszyklen $T^{(k-1)}$ und $T^{(k)}$ herangezogen. Dazu wird die maximale relative Abweichung ε_k über alle Gitterpunkte ausgewertet gemäß

$$\varepsilon_k = \max_{1 \leq i \leq N_p} \left(\frac{T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)}}{T_i^{(k-1)}} \right), \quad (3.13)$$

dabei ist N_p die Anzahl der Gitterpunkte, $T_i^{(k)}$ ist die Temperatur im i -ten Gitterpunkt in der k -ten Iteration. Unterschreitet diese Abweichung ε_k eine vorgegebene Schranke, wird der Berechnungszyklus beendet.

Dieser iterative Algorithmus wird ebenso bei der Simulation transienter Vorgänge verwendet (Abb. 3.9). Zu Beginn der Simulation wird die Ausgangstemperaturverteilung $T^{(0)}(t_0)$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ initialisiert. Die Anfangswerte für die Wärmequellendichte $Q_w^{(0)}(t_0)$ und die Kraftdichte $\vec{f}^{(0)}(t_0)$ werden damit berechnet.

Der j -te Zeitschritt beginnt damit, daß FASTEST die Integration in der Zeit ausführt. Die NAVIER-STOKES-Gleichung (2.11) und die Differentialgleichung des thermischen Energietransportes (2.26) werden in der Zeit mit einem impliziten Eulerverfahren diskretisiert. Das resultierende Gleichungssystem wird iterativ gelöst. Die erhaltene Lösung $T^{(1)}(t_{j+1})$ wird an MAFIA übergeben. Basierend auf dieser Temperaturverteilung werden in MAFIA die Wärmequellendichte $Q_w^{(1)}(t_{j+1})$ und die Kraftdichte $\vec{f}^{(1)}(t_{j+1})$ neu berechnet. Mit diesen Lösungen werden die algebraischen Gleichungen in FASTEST entsprechend aktualisiert und die iterative Lösung für $T(t_{j+1})$ fortgesetzt. Die nächste Lösung, die FASTEST ermittelt, ist $T^{(2)}(t_{j+1})$. Die Überprüfung der Konvergenz der Fixpunktiteration innerhalb eines Zeitschrittes (innere Iteration) wird gemäß Gleichung (3.13) durchgeführt. Unterschreitet ε_k die vorgegebene Toleranz wird die innere Iteration beendet und $T^{(k)}(t_{j+1})$ wird zu $T(t_{j+1})$. Falls die geforderte Anzahl von Zeitschritten noch nicht erreicht ist, beginnt FASTEST den nächsten Zeitschritt.

Der Algorithmus erlaubt je nach Anwendungsfall die Anzahl der inneren Iterationen zu begrenzen. Bei sehr schwach gekoppelten Systemen muß die innere Iteration und damit die Aktualisierung der Wärmequellendichte und der Kraftdichte nicht in jedem Zeitschritt erfolgen, da in diesem Fall die Zeitskala elektromagnetischer Vorgänge viel größer als die fluid- und thermodynamischer Vorgänge ist. FASTEST kann mehrere Zeitschritte ausführen, ohne daß in MAFIA eine Berechnung durchgeführt wird.

3.6 Codes zur Umsetzung der Kopplungsschnittstelle

Die Programme FASTEST und MAFIA sind beide in der vorliegenden Version nicht für eine externe Kopplung mit einem anderen Simulationsprogramm vorgesehen. Schnittstellen für beispielsweise den Ex- und Import von Daten während

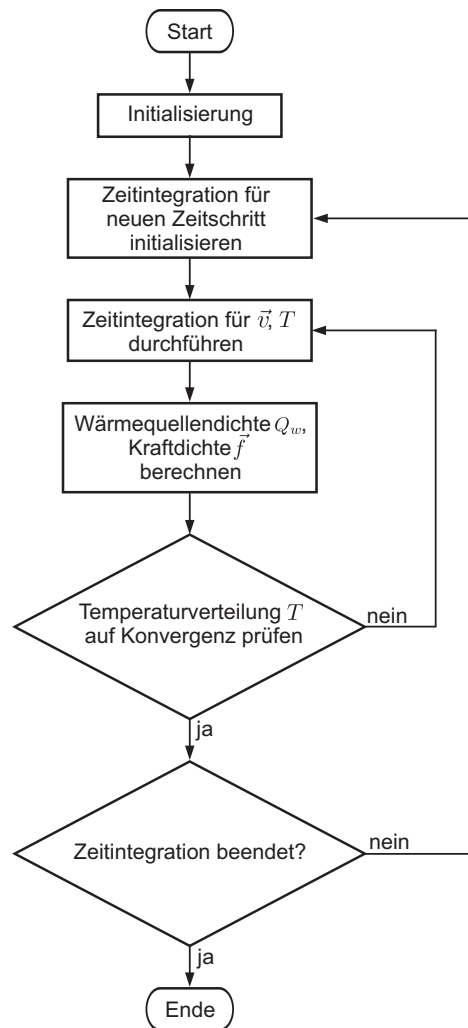


Abbildung 3.9: Ablauf einer transienten Simulation.

einer Berechnung sind nicht vorhanden. Ebenso sind die Programme nicht dafür ausgelegt, an bestimmten Zeitpunkten während einer Berechnung auf Daten eines externen Programmes zu warten. Diese Fähigkeiten mußten daher in die Quellcodes von FASTEST und MAFIA implementiert werden.

Die gesamte Kopplungsinfrastruktur, die für eine Simulation erforderlich ist, besteht neben den erweiterten Fähigkeiten der Programme noch aus der Interpolation und der zeitlichen Synchronisation. Für die Kopplungsinfrastruktur werden zwei Ansätze vorgestellt:

- Die im Rahmen der Arbeit entwickelte Lösung mit 3Dint.

- Die kommerziell verfügbare Lösung mit der Bibliothek MpCCI.

3.6.1 3Dint

Bei der Verwendung von 3Dint erfolgt die Kommunikation zwischen den Prozessen mittels Dateien. Die Dateien stehen in einem Verzeichnis, auf das alle Prozesse, die an einer Simulation beteiligt sind, zugreifen können. Es werden Kommunikations- und Datendateien unterschieden. Die Kommunikationsdateien sind leer und dienen dazu die Prozesse anzuhalten, zu starten oder zu beenden. Eine Datei mit einem bestimmten Namen löst eine bestimmte Aktion bei einem der beteiligten Prozesse aus. Eine Datendatei enthält die Werte einer physikalischen Größe sowie das Gitter, auf dem diese Größe allokiert ist. Während der Simulation laufen drei Prozesse ununterbrochen, nämlich MAFIA, FASTEST und die Kontrollinstanz. Das Interpolationsprogramm wird nur bei Bedarf durch die Kontrollinstanz gestartet. Es liest die Datendatei eines der Simulationsprogramme und interpoliert die Größe auf das Gitter des anderen. Die Kopplungsinfrastruktur 3Dint erlaubt so, daß die Prozesse auf unterschiedlichen Rechnern ausgeführt werden.

Die Prozesse, der Datenaustausch sowie die Kommunikationswege der Prozesse untereinander sind in Abbildung 3.10 dargestellt.

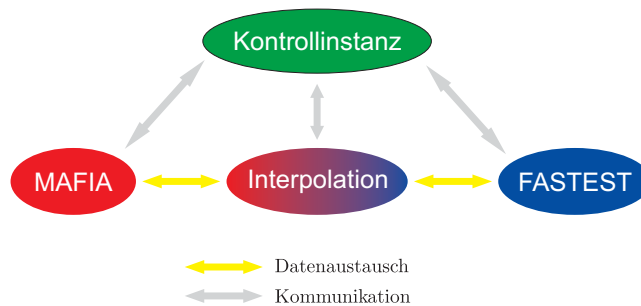


Abbildung 3.10: Kommunikationsschema der Kopplungsinfrastruktur 3Dint.

3.6.2 MpCCI

Die Bibliothek stellt Routinen, die zur Durchführung einer gekoppelten Simulation erforderlich sind, bereit.

Der Ablauf einer gekoppelten Simulation erfolgt ebenso wie bei 3Dint in zwei Stufen. Beim Aufruf der Initialisierungsroutine von MpCCI werden die Gitterzuordnungen erstellt. Dazu wird der *Bucket-Algorithmus* (s. Abschn. 3.3.1) verwendet. Die Gitter der beteiligten Programme müssen in der von MpCCI geforderten Datenstruktur vorliegen. Dies ist vom Anwender zu implementieren.

Während der gekoppelten Simulation werden Daten zwischen den beteiligten Codes ausgetauscht. Hierzu stellt die Bibliothek Routinen zum Senden und

Empfangen von Daten zur Verfügung. Die erforderliche Interpolation beim Senden und Empfangen der Daten zwischen den Gittern wird dabei ebenfalls von der Bibliothek geleistet. Die Auswahl des Interpolationsverfahrens erfolgt aufgrund der definierten Gitterstruktur sowie der Allokation der auszutauschenden Größen. Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen erfolgte die Interpolation von dem nicht orthogonalen Gitter in FASTEST auf das orthogonale in MAFIA durch eine trilineare Interpolation. In die reziproke Richtung benutzte MpCCI eine Nächste-Nachbar-Interpolation.

Die Bibliothek wird in die Simulationsprogramme eingebunden, so daß keine zusätzlichen Prozesse benötigt werden (Abb. 3.11). Die Kommunikation der

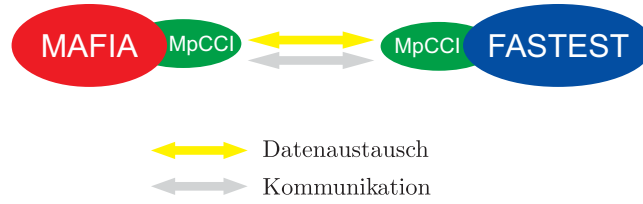


Abbildung 3.11: Kommunikationsschema der Kopplungsinfrastruktur MpCCI.

Prozesse untereinander erfolgt nach dem MPI-Standard. Auch hier ist es möglich, daß die Simulationsprogramme auf unterschiedlichen Rechnern ausgeführt werden.

3.7 Testbeispiel

Für die Untersuchung des numerischen Verhaltens einer gekoppelten Simulation wurde ein einfaches Testbeispiel berechnet. Es wurde die zweidimensionale Ausbreitung eines Lichtbogens zwischen zwei parallelen Kupferschienen betrachtet.

Der Lichtbogen wird durch ein einfaches magneto-hydrodynamisches Modell repräsentiert [30]. Die elektrische Leitfähigkeit der Luft zwischen den Schienen wird als temperaturabhängig betrachtet. Die Abhängigkeit ist in Abbildung 3.12 gezeigt. Demzufolge wird das Zentrum des Lichtbogens durch den Bereich, in dem die Luft mindestens 10 000 K heiß ist, beschrieben. Im fluiddynamischen Teilproblem wird eine einphasige Strömung mit einer Volumenkraftdichte als zusätzlichem Quellterm betrachtet.

Die Geometrie ist in Abbildung 3.13 gezeigt. Die Struktur wird in die dritte Raumrichtung, y , als unendlich ausgedehnt angenommen. Damit gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (3.14)$$

In y -Richtung wird das Modell in FASTEST mit nur einem Kontrollvolumen diskretisiert, in MAFIA werden drei Gitterpunkte verwendet. In der x - und der z -Richtung wird das Modell jeweils äquidistant diskretisiert. In FASTEST wird ein Gitter bestehend aus drei Blöcken verwendet. Die Untersuchungen

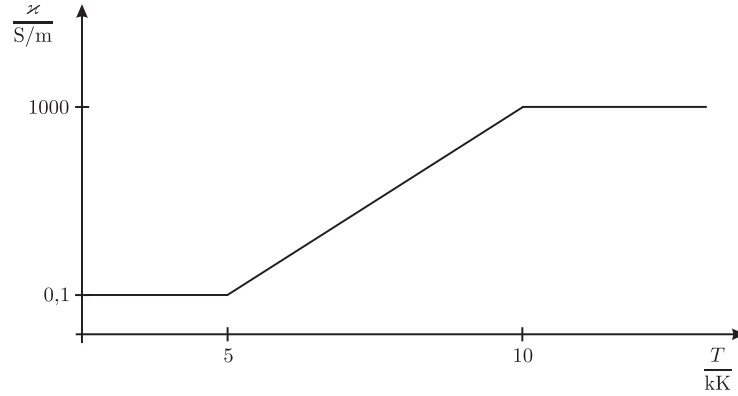
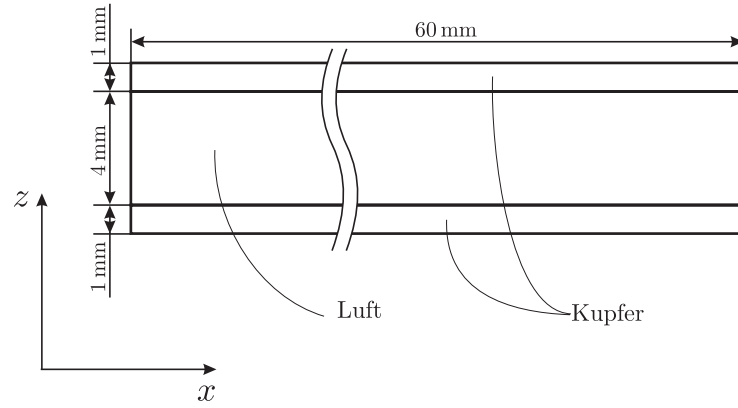


Abbildung 3.12: Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der Luft.

Abbildung 3.13: 2D-Testbeispiel in FASTEST. Gezeigt ist die Geometrie des Testbeispiels in der x - z -Ebene. In y -Richtung wird die Struktur als unendlich ausgedehnt angenommen, so daß gilt $\partial/\partial y = 0$.

werden auf Gittern unterschiedlicher Feinheitsegrade durchgeführt. Das feinste Gitter, das in FASTEST zum Einsatz kommt, besteht aus 1620 Kontrollvolumen in x -Richtung und 162 in z -Richtung. Somit ergibt sich ein Gitter mit 262 440 Kontrollvolumen. Dies entspricht einer äquidistanten Gitterschrittweite von $\Delta s = 0,037$ mm in x - und z -Richtung. Bei den größeren Gittern wurden jeweils 9 Kontrollvolumen, 3 jeweils in x - und z -Richtung, zu einem größeren Kontrollvolumen zusammengefaßt. Die Gitterschrittweite im ersten größeren Gitter beträgt somit $\Delta s = 0,11$ mm. Es ergeben sich $540 \times 1 \times 54$ Kontrollvolumen, insgesamt 29 160. Das Gitter mit einer Gitterschrittweite von 0,11 mm ist in Abbildung 3.14 gezeigt.

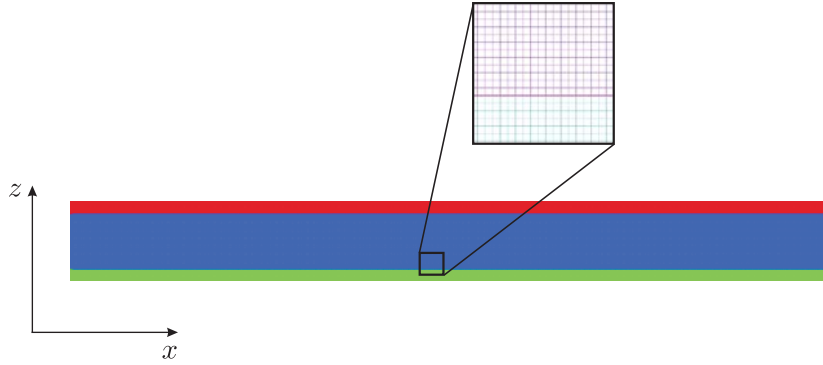


Abbildung 3.14: Gitter in FASTEST mit einer Gitterschrittweite von 0,11 mm für das 2D-Testbeispiel. Die drei Blöcke sind in unterschiedlichen Farben dargestellt, Block 1 rot, Block 2 blau und Block 3 grün.

Aus den Annahmen für das Testbeispiel folgen die Randbedingungen für die Fluidodynamik. Auch für die Blöcke 1 und 3, die die Laufschiene repräsentieren und in denen daher keine fluide Strömung stattfindet, werden fluiddynamische Randbedingungen angegeben. Die Annahme der Gleichung (3.14) wird durch symmetrische Randbedingungen in y -Richtung modelliert. Die Gitterblöcke, die das Kupfer repräsentieren, bilden für den Strömungskanal feste Wände. In x -Richtung ist das Modell periodisch geschlossen.

In der thermodynamischen Betrachtung besteht zwischen den Blöcken untereinander eine Blockverbindung. Die Ränder des Rechengebietes in z -Richtung sind mit einer NEUMANN-Randbedingung mit $\partial T / \partial n = 0$ abgeschlossen. Ebenso die Ränder in y -Richtung, um die Annahme (3.14) zu treffen. Analog zur Fluidodynamik gelten an den Rändern in x -Richtung periodische Randbedingungen. Ein Wärmeaustausch zwischen den Kupferschienen und der Umgebung findet nicht statt. Diese Randbedingung wurde gewählt, da die simulierte Zeit typischer Weise im Bereich von einigen hundert Mikrosekunden liegt. In dieser Zeit erfährt das Kupfer in der Simulation an der Außenseite (oberer und unterer Rand des Rechengebietes in z -Richtung) keine nennenswerte Erwärmung. Auch die Aufheizung der Luft durch das Kupfer ist vernachlässigbar im Vergleich zu der JOULEschen Verlustleistung durch den elektrischen Strom durch die Luft. In Abbildung 3.15 ist die Temperaturverteilung nach einer Zeit von $t = 5 \mu\text{s}$ gezeigt.

In MAFIA wird die Struktur um zwei weitere Materialwürfel jeweils am unteren Ende der Kupferschienen ergänzt. Diese dienen dazu, um im diskreten Modell die Potentialdifferenz von $U = 100 \text{ V}$ zwischen den beiden Laufschiene vorzugeben. Diese Würfel werden als ideal elektrisch leitfähiges Material mit einem konstanten Potential ($+50 \text{ V}$ und -50 V) behandelt.

Auch in MAFIA wird die Struktur in x - und z -Richtung äquidistant diskretisiert. Die Gitterschrittweite für die feinste Auflösung in x - und z -Richtung

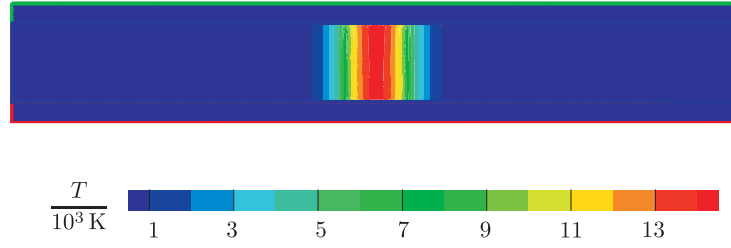


Abbildung 3.15: Temperaturverteilung im Testbeispiel nach $5 \mu\text{s}$. (Die Abbildung ist in der Länge gestaucht.)

beträgt dabei ebenfalls $\Delta s = 0,037 \text{ mm}$. In die dritte Raumrichtung werden aufgrund der Annahme (3.14) bei allen Feinheitsgraden drei Knoten verwendet. Für das feinste Gitter in MAFIA ergeben sich damit 1648 Gitterknoten in x -Richtung, drei in y - und 162 in z -Richtung, insgesamt 800 928 Gitterpunkte. Die Vergrößerung erfolgt ebenso wie in FASTEST, indem 3×3 Gitterzellen in x - und z -Richtung zusammengefaßt werden.

Für das stationäre Strömungsfeld werden an allen Rändern des Rechengebietes solche Randbedingungen verwendet, daß die normalen Komponenten des elektrischen Feldes verschwinden,

$$E_n = 0.$$

Es ergibt sich eine maximale Stromdichte im Lichtbogen von etwa $2,48 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$. Der Betrag der Stromdichte ist in Abbildung 3.16 gezeigt.

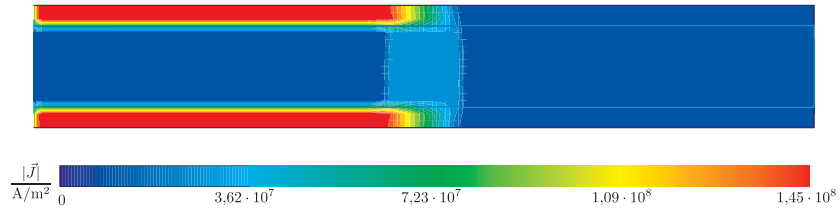


Abbildung 3.16: Betrag der Stromdichte im 2D-Testbeispiel. (Die Abbildung ist in der Länge gestaucht.)

Aufgrund der Annahmen in y -Richtung (3.14) werden an diesen Rändern des Rechengebietes für das magnetostatische Problem Randbedingungen vorgegeben, bei denen die tangentialen Komponenten des magnetischen Feldes verschwinden,

$$H_t = 0.$$

An allen übrigen Rändern gilt, daß die normale Komponente zu Null wird.

Die Zeitintegration wurde bei allen Simulationen mit einem impliziten EULER-Verfahren durchgeführt.

Zur Auswertung eines Ergebnisses einer Untersuchung wird die Temperatur zu einem bestimmten simulierten Zeitpunkt auf dem in FASTEST verwendeten Gitter betrachtet. Der mittlere relative quadratische Fehler ε_F bez. der Referenzlösung wird gemäß

$$\varepsilon_F = \sqrt{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left(\frac{T_i^{(r)} - T_i^{(a)}}{T_i^{(r)}} \right)^2} \quad (3.15)$$

bestimmt, wobei $T^{(r)}$ die Referenzlösung und $T^{(a)}$ die auszuwertende Lösung bezeichnet.

Anhand dieses Testbeispiels wurde der Einfluß verschiedener Parameter der gekoppelten Simulation auf das Simulationsergebnis untersucht.

3.7.1 Konvergenz der räumlichen Diskretisierung

Im Zusammenhang mit den Untersuchungen bez. der räumlichen Diskretisierung wurde einmal die Konvergenz einer gekoppelten Simulation *per se*, zum anderen das Konvergenzverhalten bei den verschiedenen Kopplungs- und Interpolationsverfahren betrachtet.

Als Referenzlösung wurde eine Simulation auf dem feinsten Gitter mit einer äquidistanten Gitterschrittweite von $\Delta s = 0,037$ mm in x - und z -Richtung durchgeführt. Die Zeitschrittweite betrug $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-6}$ s. Für die innere Kopplungsiteration wurde eine Toleranzgrenze von $\varepsilon_k < 10^{-2}$ vorgegeben. Die Resultate wurden nach einer simulierten Zeit von $t = 5 \cdot 10^{-6}$ s verglichen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.17 gezeigt. Aufgrund der hohen Komplexität der gekoppelten Simulation wurde eine Untersuchung auf feineren Gittern nicht durchgeführt. Bereits die Rechenzeit für die zwei Zeitschritte, die in der Referenzrechnung ausgeführt werden mussten, betrug etwa 22 Stunden.

Alle drei verwendeten Lösungsverfahren konvergieren. Allerdings mit deutlichen Unterschieden in der Konvergenzordnung und in der Genauigkeit.

Die langsamste Konvergenz und auch die niedrigste Genauigkeit ist bei der Verwendung von MpCCI festzustellen. Zwei Faktoren beeinflussen dieses Ergebnis maßgeblich:

1. die Verwendung der Nächster-Nachbar-Interpolation und
2. die Verwendung unterschiedlicher Interpolationsverfahren bei der Interpolation vom Gitter in MAFIA auf das in FASTEST einerseits und der reziproken Interpolation andererseits.

Die Drittelung der Gitterschrittweite führt lediglich zu einer Abnahme des Fehlers um 15 %.

Etwas stärker konvergiert die Lösung, die mit dem Kopplungsverfahren 3Dint und der SHEPARD-Interpolation ermittelt wurde. Zwar beträgt die theoretische Konvergenzordnung der SHEPARD-Interpolation wie die der Nächste-Nachbar-Interpolation auch lediglich eins, allerdings wird bei dieser Simulation das gleiche

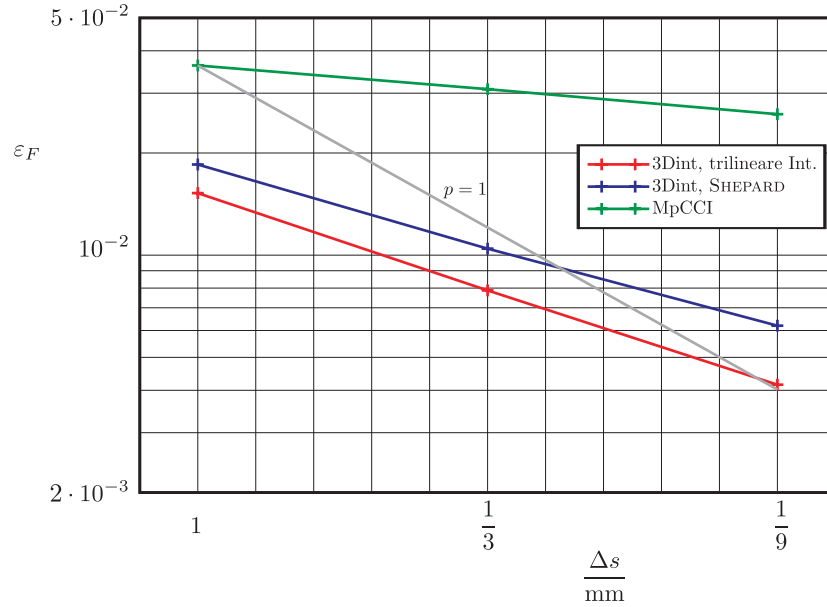


Abbildung 3.17: Relativer quadratischer Fehler bei verschiedenen Gitterauflösungen und Interpolations- bzw. Kopplungsverfahren. Die grüne Kurve zeigt den Fehler bei Verwendung von MpCCI, die blaue Kurve bei der Verwendung von 3Dint mit der SHEPARD-Interpolation und die rote Kurve 3Dint mit der trilinearen Interpolation. In grau ist eine Kurve mit $\mathcal{O}(\Delta s)$ zum Vergleich gezeigt.

Verfahren in beide Übertragungsrichtungen verwendet, was zu einer Verbesserung des Gesamtverhaltens führt. Eine Drittelung der Gitterschrittweite führt zu einer Verkleinerung des Fehlers um etwa 42 %.

Erwartungsgemäß wurde das beste Ergebnis, sowohl bez. der Konvergenzrate als auch bez. der Genauigkeit der Lösung, mit der trilinearen Interpolation erzielt. Die theoretische Konvergenzordnung der Interpolation beträgt zwei. Bei diesem Verfahren bewirkt die Drittelung der Gitterschrittweite eine Reduktion des Fehlers um etwa 49 %.

Bei der monodisziplinären Berechnung eines Problems der Fluidodynamik, der Thermodynamik oder der Elektrodynamik kann mit den verwendeten Programmen FASTEST und MAFIA eine räumliche Konvergenzordnung von zwei erzielt werden. Die gekoppelte Betrachtungsweise bewirkt aufgrund der zusätzlichen Nichtlinearitäten und Erweiterungen der Gleichungen eine erhebliche Verschlechterung der räumlichen Konvergenz. Für die Durchführung von Simulationen realer Probleme ist 3Dint mit der trilinearen Interpolation zu bevorzugen. Mit diesem Verfahren wurden die besten Ergebnisse erzielt.

3.7.2 Konvergenz der zeitlichen Diskretisierung

Weiterhin wurde der Einfluß der Zeitschrittweite auf eine gekoppelte Simulation betrachtet. Dabei war das Konvergenzverhalten bei einer Simulation mit 3Dint und der SHEPARD-Interpolation und der trilinearen Interpolation von Interesse.

Für die Untersuchung wurde sowohl in FASTEST als auch in MAFIA ein Gitter mit einer äquidistanten Gitterschrittweite von $\Delta s = 0,33$ mm in x - und z -Richtung verwendet. Die Genauigkeitstoleranz für die innere Iteration des Kopplungsalgorithmus wurde auf $\varepsilon_k < 10^{-2}$ gesetzt. Mit Zeitschrittweiten von 10^{-5} s, $2,5 \cdot 10^{-6}$ s, 10^{-6} s und $2,5 \cdot 10^{-7}$ s wurde die zweidimensionale Ausbreitung jeweils über eine Zeit von $t = 10^{-5}$ s simuliert. Die Ergebnisse wurden mit einer Simulation mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 10^{-7}$ s gemäß (3.15) verglichen.

Wie die Ergebnisse in den Abbildungen 3.18 und 3.19 zeigen konvergieren

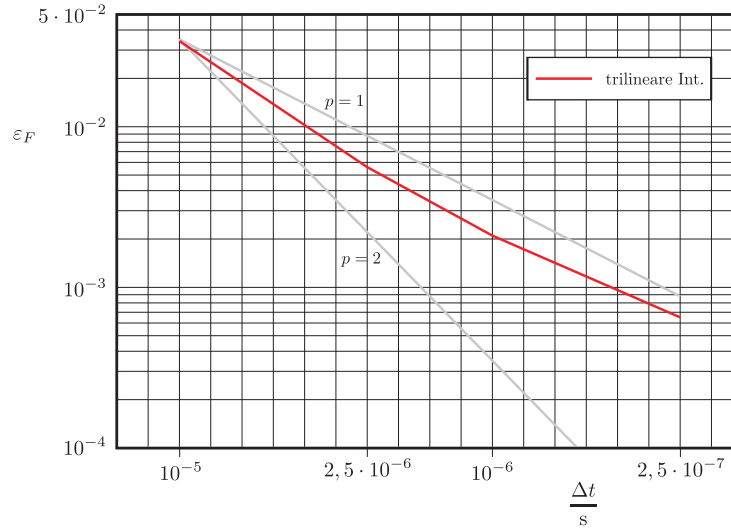


Abbildung 3.18: Relativer quadratischer Fehler bei verschiedenen Zeitschrittweiten, trilineare Interpolation. Die beiden grauen Kurven zeigen eine lineare und eine quadratische Abnahme bei Verkleinerung des Zeitschrittes.

die Lösungen bei unterschiedlichen Zeitschrittweiten. Aufgrund des verwendeten impliziten EULER-Verfahrens für die Zeitintegration wird eine Abnahme des Fehlers mit einer Ordnung von eins erwartet. Die Untersuchungen zeigen sogar eine geringfügig stärkere Konvergenz, und zwar sowohl bei einer Simulation mit der SHEPARD-Interpolation, als auch bei einer Simulation mit der trilinearen Interpolation. Die theoretische Konvergenzordnung des Zeitintegrationsverfahrens wird durch die zusätzlichen Effekte, die aufgrund der gekoppelten Berechnung auftreten, nicht verschlechtert. Wird der Fehler der Ergebnisse, die mit der SHEPARD-Interpolation ermittelt wurden, bez. der Referenzrechnung mit trilinearer

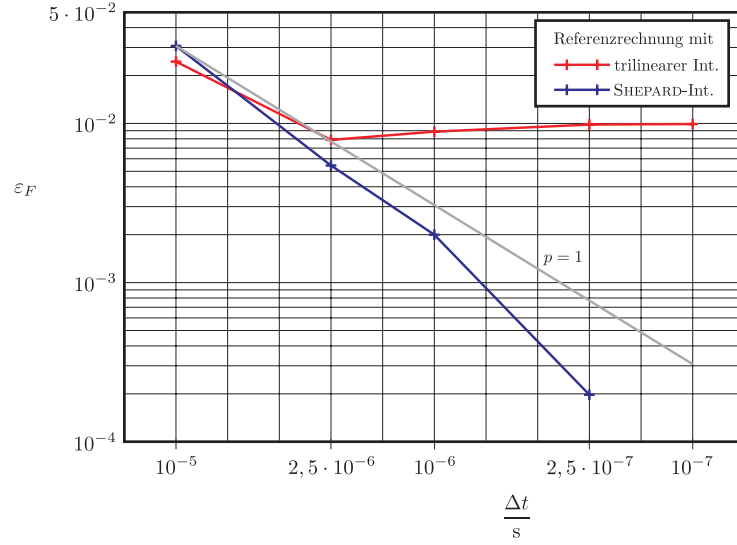


Abbildung 3.19: Relativer quadratischer Fehler bei verschiedenen Zeitschrittwerten, SHEPARD-Interpolation. Die graue Kurve zeigt eine lineare Abnahme bei Verkleinerung des Zeitschrittes. In blau ist der Fehler bezogen auf die Referenzrechnung mit der SHEPARD-Interpolation gezeigt, in rot bezogen auf die trilineare Interpolation.

Interpolation betrachtet, so konvergiert der Fehler gegen den, der aus der Verwendung unterschiedlicher Interpolationsverfahren resultiert (s. Abschn. 3.7.1).

Zum Erreichen der Toleranzgrenze für die innere Iteration des Kopplungsalgorithmus werden je nach Zeitschritt eine unterschiedliche Anzahl von inneren Iterationen benötigt. In Abbildung 3.20 ist die Abnahme des Fehlers ε_k (s. Gl. (3.13)) über die inneren Iterationen innerhalb eines Zeitschrittes für eine Simulation mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 10^{-5}$ s gezeigt. Bei der Simulation mit der trilinearen Interpolation wird nach neun Iterationen das geforderte Toleranzkriterium unterschritten, $\varepsilon_k < 10^{-2}$, acht Iterationen werden bei Verwendung der SHEPARD-Interpolation benötigt.

Bei dem deutlich kleineren Zeitschritt $\Delta t = 10^{-7}$ s wird das Toleranzkriterium in jedem Zeitschritt bereits mit der ersten inneren Iteration erreicht. Lediglich mit der SHEPARD-Interpolation werden im ersten Zeitschritt zwei Iterationen durchgeführt. Um den Vorgang über eine Zeit von $t = 10^{-5}$ s zu simulieren, werden 100 Zeitschritte benötigt. Der Verlauf des Fehlers ε_k ist in Abbildung 3.21 gezeigt.

Insgesamt werden also bei Verwendung des kleinen Zeitschrittes 100 Kopplungszyklen durchgeführt, bis der Vorgang über die Zeit von $t = 10^{-5}$ s simuliert ist. Mit dem größeren Zeitschritt von $\Delta t = 10^{-5}$ s werden hingegen deutlich weniger Kopplungszyklen benötigt, acht mit der SHEPARD-Interpolation und neun

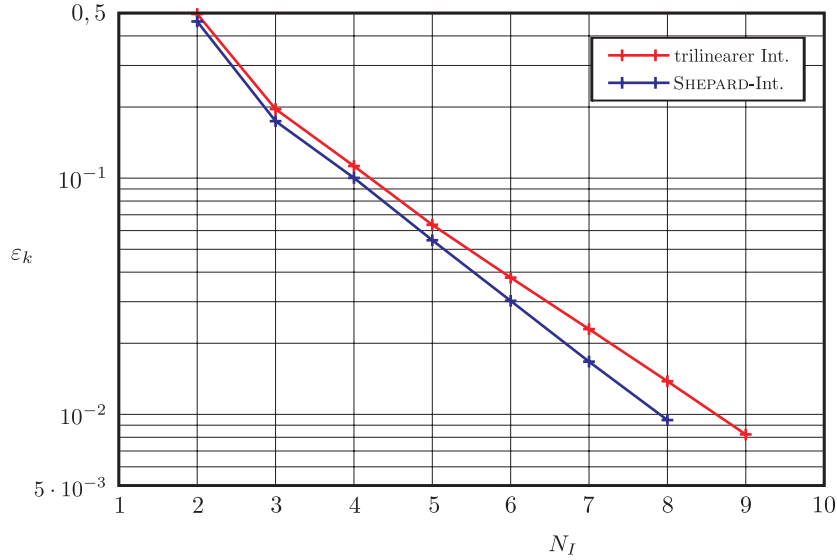


Abbildung 3.20: Abnahme des Fehlers ε_k über die inneren Iterationen N_I bei einer Simulation mit $\Delta t = 10^{-5}$ s. In rot bei der Simulation mit trilinearer Interpolation, in blau mit SHEPARD-Interpolation.

mit der trilinearen. Der mittlere relative quadratische Fehler bez. der mit trilinear Interpolation ermittelten Referenzlösung beträgt bei der Simulation mit größerem Zeitschritt und trilinear Interpolation dann etwa 3,41 %, mit der SHEPARD-Interpolation etwa 2,44 %. Dem steht die um etwa einen Faktor zehn kürzere Rechenzeit gegenüber. Die Wahl der Interpolationsverfahren hat sowohl auf die Konvergenzordnung bez. der Zeitschrittweite, als auch auf die Genauigkeit der Lösung nur einen geringen Einfluß. Dieser kann gegenüber dem dominanten Einfluß, den die unterschiedlichen Interpolationsverfahren bei verschiedenen Gitterschrittweiten haben, als Vernachlässigbar angesehen werden.

3.7.3 Einfluß des Toleranzparameters der inneren Iteration

Als drittes wurde die Konvergenz der Simulation bez. des Toleranzparameters der inneren Iteration ε_k untersucht. Wiederum für 3Dint mit SHEPARD- und mit trilinearer Interpolation.

Die Untersuchungen wurden auf Gittern mit einer Gitterschrittweite von $\Delta s = 0,33$ mm durchgeführt. Es wurde jeweils ein Zeitschritt mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 10^{-5}$ s simuliert. Die Referenzlösungen wurden mit einem Toleranzparameter von $\varepsilon_k < 10^{-7}$ ermittelt. Die Untersuchung wurde mit den Werten 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} und 10^{-5} für ε_k durchgeführt.

Die Abbildungen 3.22 und 3.23 zeigen die Abnahme des mittleren quadra-

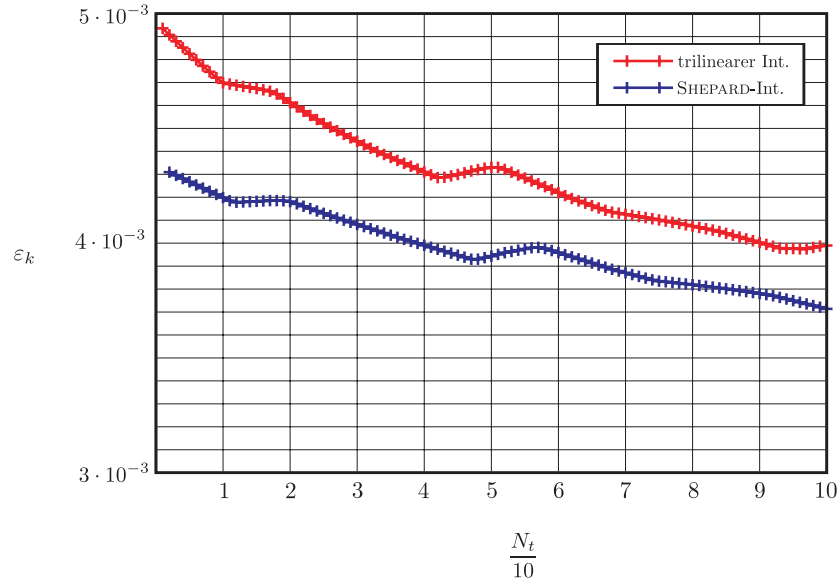


Abbildung 3.21: Fehler ε_k über die Zeitschritte N_t bei einer Simulation mit $\Delta t = 10^{-7}$. In rot bei der Simulation mit trilinearer Interpolation, in blau mit SHEPARD-Interpolation.

tischen Fehlers ε_F (s. Gl. (3.15)) bez. der jeweiligen Referenzlösung für die verschiedenen Werte von ε_k . Zum Vergleich ist eine Abnahme erster Ordnung gezeigt.

Die tatsächliche Abhängigkeit von dem Toleranzparameter ε_k ist bei der trilinearen Interpolation wenig besser als von der Ordnung eins.

Die Verwendung der SHEPARD-Interpolation führt zu einer Konvergenz, die wenig schlechter ist als erster Ordnung. Wird die Referenz der trilinearen Interpolation herangezogen, so konvergiert die Lösung mit der SHEPARD-Interpolation gegen einen Fehler von etwa 1,14 %. Diese Abweichung liegt in der Verwendung der SHEPARD-Interpolation begründet (s. Abschn. 3.7.1).

Im Vergleich zu den zuvor untersuchten Parametern ist der Einfluß des Toleranzparameters der inneren Iteration auf die Genauigkeit des Ergebnisses gering. Selbst die Vergrößerung dieser Parameter um den Faktor 10^5 auf 10^{-2} führt lediglich zu einem mittleren relativen quadratischen Fehler von etwa 0,15 % bei der trilinearen und 0,05 % bei der SHEPARD-Interpolation jeweils bez. der Referenzlösung mit demselben Interpolationsverfahren.

Um die jeweilige Toleranz zu erreichen, war die Ausführung einer unterschiedlichen Anzahl innerer Iterationen erforderlich (s. Abb. 3.24).

Abbildung 3.25 zeigt die Abnahme des Fehlers ε_k über die inneren Iterationen für die beiden Referenzrechnungen. Mit der trilinearen Interpolation nimmt der Fehler ab der 10. Iteration pro innerem Iterationszyklus um etwa 40 % ab.

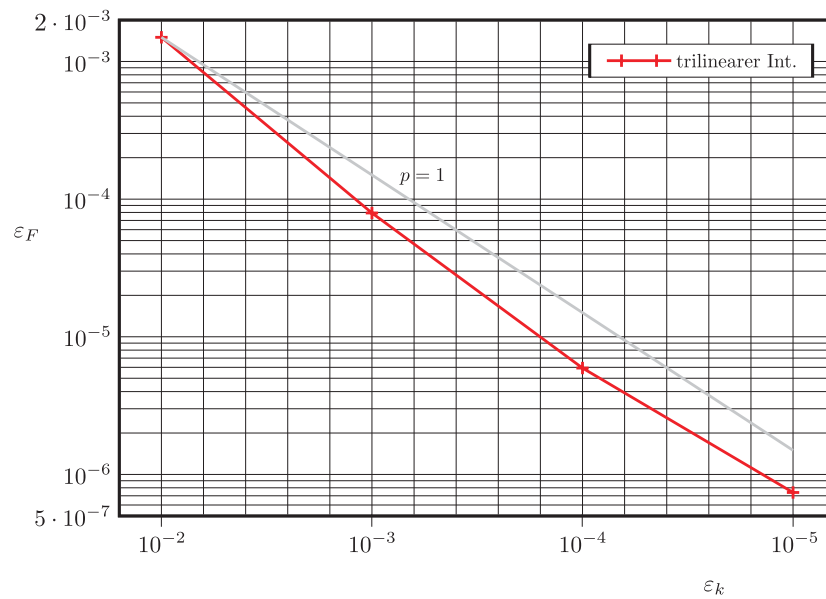


Abbildung 3.22: Mittlerer quadratischer Fehler ε_F über die Toleranz der inneren Iteration ε_k mit trilinearer Interpolation. Die graue Kurve zeigt eine Abnahme 1. Ordnung.

Das Konvergenzverhalten bei der SHEPARD-Interpolation ist mit einer Abnahme von etwa 47% weniger besser. Dem steht die bessere Genauigkeit der trilinearen Interpolation gegenüber.

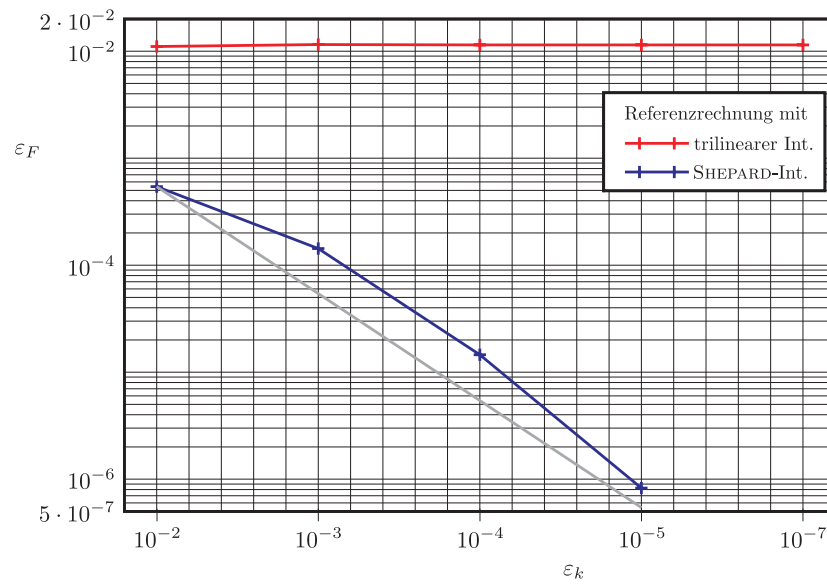


Abbildung 3.23: Mittlerer quadratischer Fehler ε_F über die Toleranz der inneren Iteration ε_k mit SHEPARD-Interpolation. Die graue Kurve zeigt eine Abnahme 1. Ordnung. In blau ist die Konvergenz mit der Lösung mit SHEPARD-Interpolation als Referenzlösung dargestellt, in rot mit der mit trilinearer Interpolation ermittelten Lösung als Referenz.

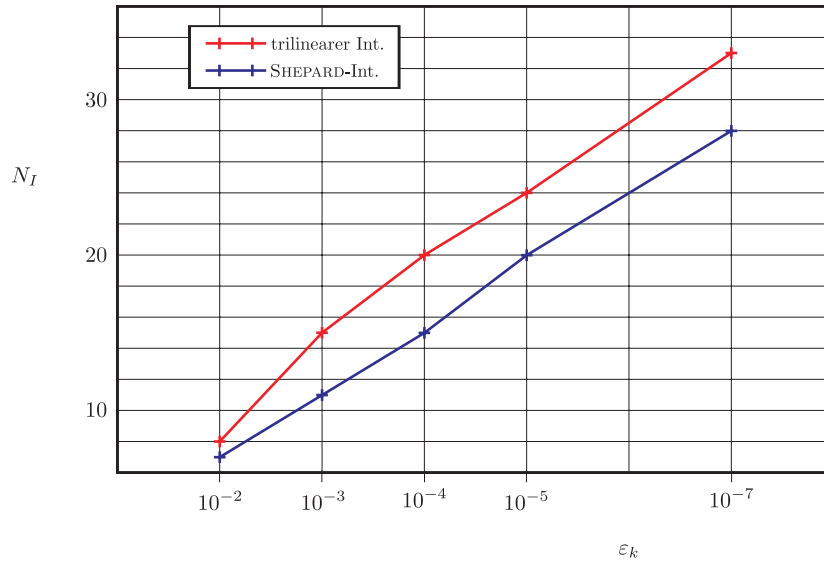


Abbildung 3.24: Anzahl der benötigten inneren Iterationen N_I über den Toleranzparameter ε_k . In rot sind die Iterationen für die trilineare Interpolation, in blau für die SHEPARD-Interpolation gezeigt.

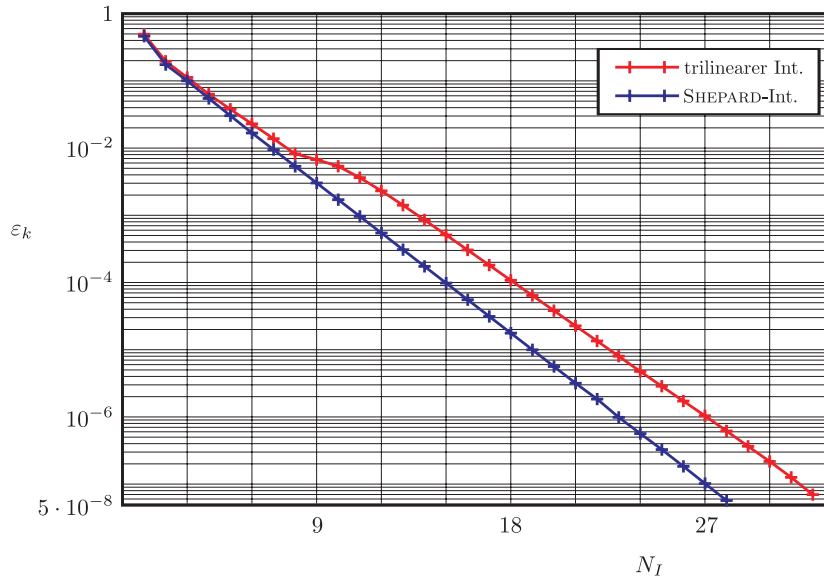


Abbildung 3.25: Fehler ε_k über die Iterationen für die Referenzrechnungen. In rot ist der Fehler für die Simulation mit der trilinearen Interpolation, in blau mit der SHEPARD-Interpolation gezeigt.

Kapitel 4

Simulationsbeispiele

Im folgenden werden drei Beispiele gezeigt, bei denen die Berücksichtigung der Kopplung der Fluid-, Thermo- und Elektrodynamik erforderlich ist, um sie mit ausreichender Genauigkeit in der Simulation zu betrachten. Die drei Beispiele wurden mit den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Werkzeugen berechnet.

4.1 Fluidgekühltes Kabel

In der Beschleunigertechnik werden zur Strahlführung starke Magnetfelder mit Flußdichten im Bereich von einigen Tesla eingesetzt. Diese Magnetfelder werden durch Spulen erzeugt. Abbildung 4.1 zeigt drei solcher Spulen. Aufgrund der hohen Flußdichten sind in den Bauelementen sehr hohe Ströme von einigen Kiloampere erforderlich. Wird auf die Verwendung supraleitender Technik verzichtet, so resultieren in den Leitern der Spulen sehr große Verlustleistungen. Die Spulen werden sehr heiß. Dies kann bis hin zum Schmelzen der elektrischen Leiter in den Spulen führen. Eine gängige Methode, um die Verlustwärme aus den Spulen abzuführen, ist die Verwendung von hohlen Leitern, die mit Wasser gekühlt werden. In Abbildung 4.2 sind die Anschlüsse für den Wasserzu- und -abfluß gezeigt. Die Leiter der Spulen sind aus Kupfer.

Will man die Erwärmung dieses Kabels mittels einer numerischen Simulation untersuchen, so müssen mehrere physikalische Vorgänge berücksichtigt werden. Zunächst ist die Elektrodynamik in den Spulen zu betrachten. Sie beschreibt die Verteilung des elektrischen Stromes und der Wärmequellendichte (s. Gl. (2.46) und (2.52)). Die Durchströmung des hohlen Kupferkabels mit Wasser ist ein fluiddynamischer Vorgang. Schließlich sind die thermischen Prozesse, die Erhitzung und die Wärmediffusion und -konvektion, zu berücksichtigen.

Für die Simulation wurde ein dreidimensionales Modell des Kabels betrachtet (s. Abb. 4.3). Die Abmessungen des Modells sind in Abbildung 4.4 gezeigt.

Das Modell wurde in FASTEST mit einem Gitter aus 9 Blöcken mit insgesamt 105 984 Kontrollvolumen diskretisiert. Abbildung 4.5 zeigt einen Schnitt durch das Gitter in der y - z -Ebene. In den unterschiedlichen Farben sind die

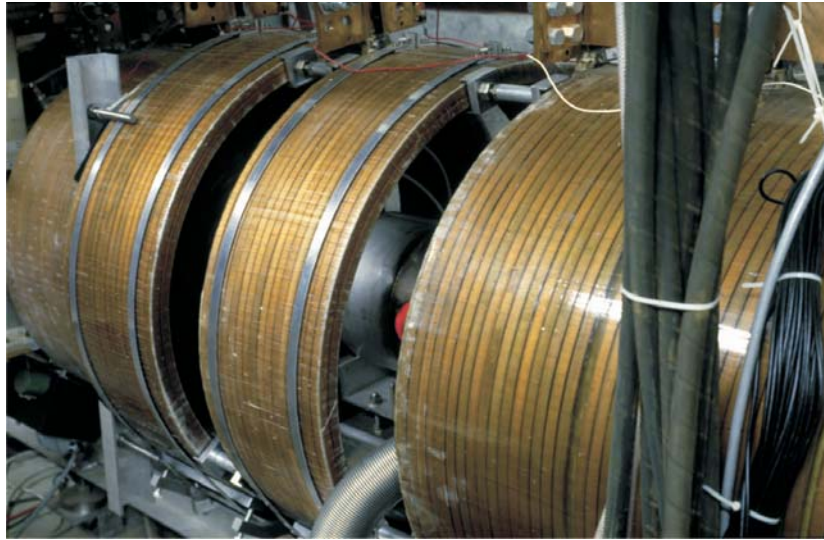


Abbildung 4.1: Kupferspulen zur Strahlfokussierung in einem Teilchenbeschleuniger.

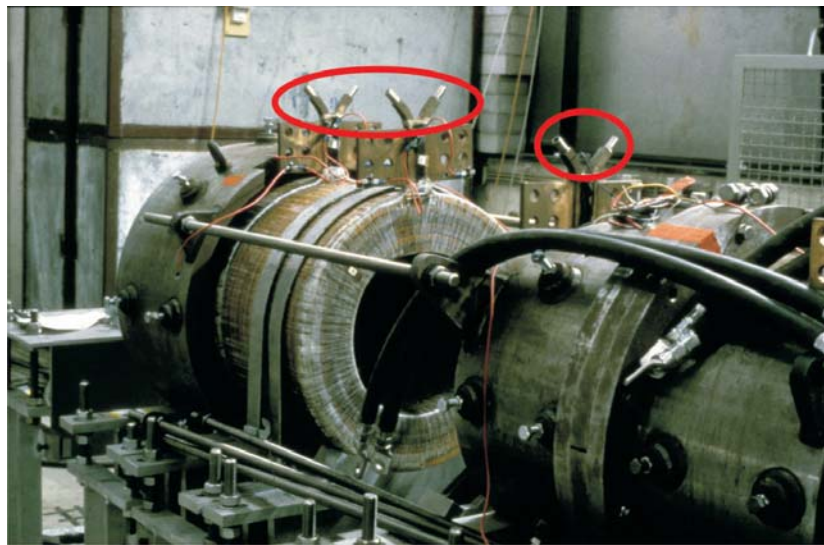


Abbildung 4.2: Anschlüsse für den Wasserzu- und -abfluß in die hohlen Leiter der Spulen.

neun Blöcke des Gitters zu erkennen. Das Gitter, das in MAFIA verwendet wurde, besteht aus $301 \times 13 \times 13$, insgesamt 50 869 Gitterpunkten. Ein Schnitt durch dieses Gitter in der y - z -Ebene ist in Abbildung 4.6 gezeigt.

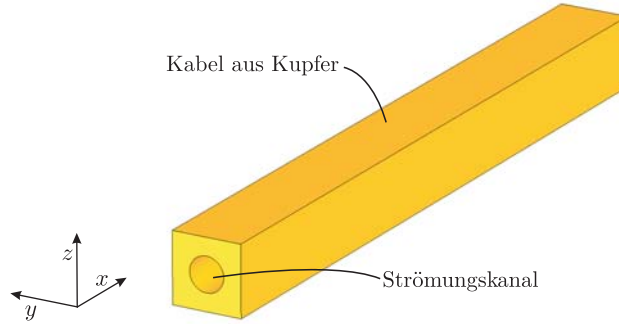


Abbildung 4.3: 3D-Modell des simulierten Kabelabschnitts.

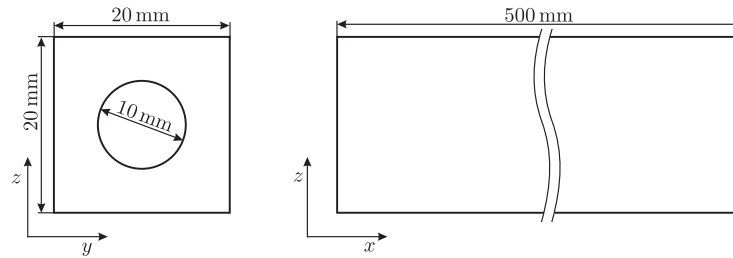


Abbildung 4.4: Maße des 3D-Modells des simulierten Kabelabschnitts.

Für die Fluidodynamik sind nur die Randbedingungen der Blöcke, die den Strömungskanal bilden, interessant. In den anderen Blöcken werden die Differentialgleichungen der Fluidodynamik nicht gelöst. Am unteren Rand in x -Richtung wurde eine Einstromgeschwindigkeit von $v_0 = 10 \text{ m/s}$ vorgegeben, dementsprechend eine Ausstromrandbedingung am oberen x -Rand. An den Grenzen der Blöcke im Strömungskanal zu den Blöcken, die das Kupfer bilden, wurde die Randbedingung der festen Wand verwendet. Zwischen den Strömungsblöcken untereinander besteht eine Blockverbindung. Bei der thermodynamischen Betrachtung sind alle neun Blöcke an ihren jeweiligen Grenzflächen verbunden. Damit wird zwischen dem Strömungskanal und dem Kupfer ein diffusiver Wärmeübergang gerechnet. An den Rändern mit y - und z -Normale wird eine NEUMANN-Randbedingung für die Temperatur mit $\partial T / \partial n = 0$ verwendet. Ebenso wird diese Randbedingung am oberen x -Rand und am unteren x -Rand für das Kupfer verwendet. Das einströmende Fluid hat eine Temperatur von $T_0 = 293,15 \text{ K}$.

In MAFIA wurde ein Spannungsabfall von $U = 0,1 \text{ V}$ über das Kabelstück vorgegeben, die Ränder in x -Richtung wurden auf ein konstantes Potential von $\Phi_+ = 0,05 \text{ V}$ bzw. $\Phi_- = -0,05 \text{ V}$ gesetzt. Damit ergibt sich ein Gesamtstrom

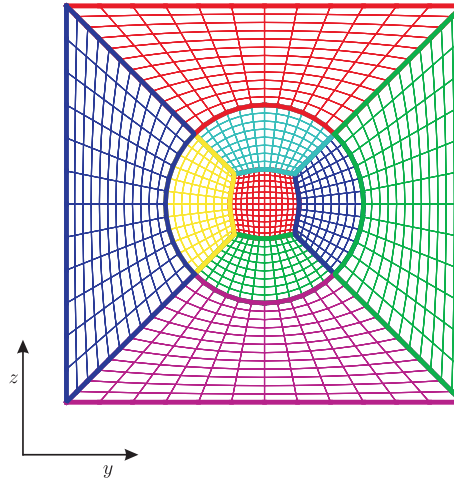


Abbildung 4.5: Schnitt durch das Gitter in FASTEST in der y - z -Ebene. Die neun Blöcke des Gitters sind in unterschiedlichen Farben dargestellt.

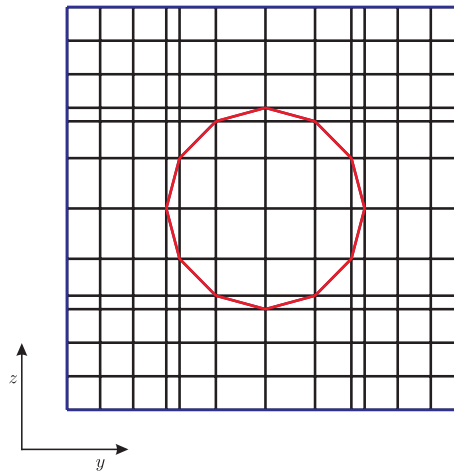


Abbildung 4.6: Schnitt durch das Gitter in MAFIA in der y - z -Ebene. In schwarz sind die Gitterlinien gezeigt, in rot der Strömungskanal.

von etwa $I \approx 3,65$ kA. An den Rändern in y - und z -Richtung wurde das normale elektrische Feld zu Null gesetzt.

Die spezifische elektrische Leitfähigkeit des Kupfers ist temperaturabhängig. Für die hier durchgeführten Simulationen wurde für den Reziprokwert der elektrischen Leitfähigkeit, den spezifischen elektrischen Widerstand ρ , eine Ab-

hängigkeit der Form

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (4.1)$$

angenommen [31]. Die Parameter ρ_0 und α sind [31]

$$\rho_0 = 17,8 \cdot 10^{-9} \Omega \text{m} \quad \text{und} \quad \alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}} \quad (4.2)$$

Die Referenztemperatur ist $T_0 = 293,15 \text{ K}$.

Die relevanten Einflußgrößen Einstromgeschwindigkeit und Spannungsabfall ändern sich mit der Zeit nicht. Das Problem wurde daher als stationärer Vorgang simuliert. Für den Toleranzparameter der Kopplungsiteration (s. (3.13)) wurde $\varepsilon_k < 10^{-3}$ vorgegeben.

Abbildung 4.7 zeigt die Temperaturverteilung im x - z -Schnitt durch die Ka-

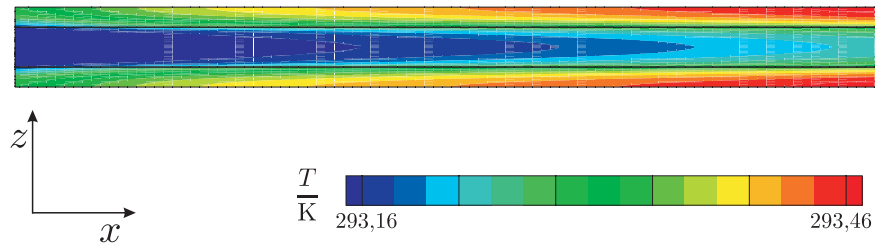


Abbildung 4.7: Temperaturverteilung in Kabel und Wasser in der x - z -Ebene in der Mitte des Kabels. (Die Abbildung ist in der Länge gestaucht.)

belmitte. Das Wasser erwärmt sich bis auf $293,32 \text{ K}$, was einer Erwärmung um $0,18 \text{ K}$ entspricht. In Abbildung 4.8 ist die Temperatur in einem Schnitt in der y - z -Ebene mit der x -Koordinate $x = 500 \text{ mm}$, also am Ende des simulierten Kabelabschnitts, und auf der Außenfläche des Kabels gezeigt. Erwartungsgemäß wird das Kupfer dort am wärmsten, wo es am weitesten von dem Strömungskanal entfernt ist. In dem simulierten Teilstück heizt sich das Kupfer bis auf $293,53 \text{ K}$ auf.

Der Stromfluß findet fast ausschließlich im Kupfer statt, wie Abbildung 4.9 zeigt. Hier wird demzufolge die meiste Verlustleistung produziert. Dabei ist eine signifikante Abweichung von einer Gleichverteilung im Kupfer nicht zu erkennen. Die Erwärmung beeinflusst die Leitfähigkeit des Kupfers nur wenig.

Eine in der Praxis wichtige Stellgröße zur Beeinflussung der Aufheizung der Spulen ist die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers. In Abbildung 4.10 ist die Temperaturverteilung durch die x - z -Ebene durch die Kabelmitte bei einer Einstromgeschwindigkeit von $v_0 = 5 \text{ m/s}$ gezeigt. Die Temperaturzunahme des Wassers beträgt in diesem Fall $0,35 \text{ K}$ im Gegensatz zu $0,18 \text{ K}$ bei $v_0 = 10 \text{ m/s}$, was in etwa einer Verdopplung der Temperaturzunahme entspricht. Die innere Energie des Wassers ist somit doppelt so hoch. Da sich die Verweildauer des Wassers in dem Kabelabschnitt aufgrund der Halbierung der Strömungsgeschwindigkeit verdoppelt, wird erwartungsgemäß die doppelte Energie von dem Wasser aufgenommen. Die höchste im Kupfer auftretende Temperatur beträgt

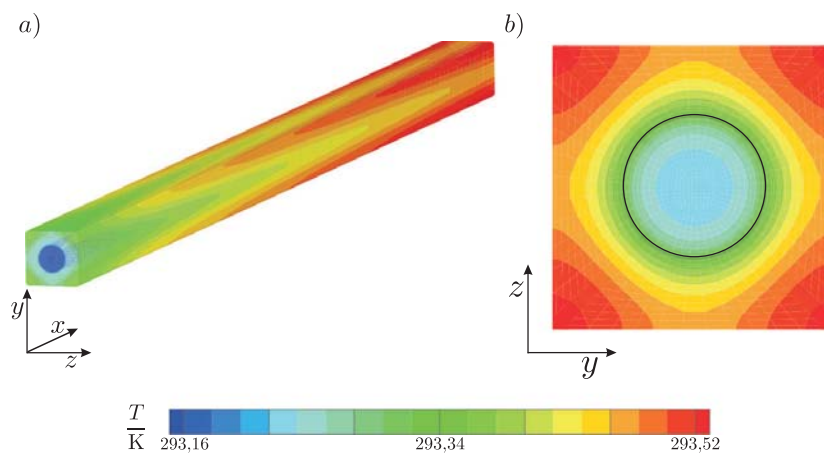


Abbildung 4.8: Temperatur des simulierten Kabels. Gezeigt ist die Temperatur a) auf der Oberfläche des Kabels und b) ein Schnitt in der y - z -Ebene mit der x -Koordinate $x = 500$ mm.

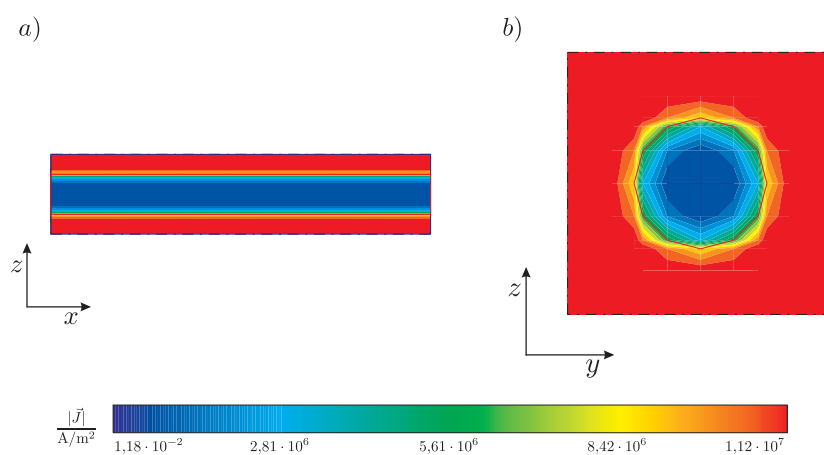


Abbildung 4.9: Stromverteilung im Kabel. Gezeigt ist der Betrag der Stromdichte $|\vec{J}|$ in der x - z -Ebene durch die Mitte des Kabels a) und in einer y - z -Ebene b). Die eckige Darstellung in Abbildung b) resultiert aus dem Darstellungsverfahren der Ergebnisse. (Die Abbildungen sind nicht maßstäblich.)

nun 293,7 K. Dies sind 0,17 K mehr als bei der höheren Einstromgeschwindigkeit $v_0 = 10$ m/s.

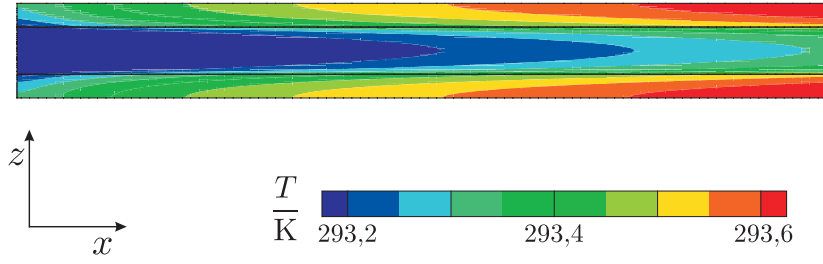


Abbildung 4.10: Temperaturverteilung in Kabel und Wasser in der x - z -Ebene in der Mitte des Kabels bei einer Strömungsgeschwindigkeit von $v = 5$ m/s. (Die Abbildung ist in der Länge gestaucht.)

Eine einfache analytische Abschätzung liefert ähnliche Ergebnisse. Die gesamte Dissipationsleistung P_c in dem betrachteten Kabelabschnitt beträgt

$$P_c = U \cdot I \approx 0,1 \text{ V} \cdot 3,65 \text{ kA} = 365 \text{ W}. \quad (4.3)$$

Die innere Energie des Wassers ergibt sich gemäß Gleichung (2.18) zu

$$W_i = \rho c_p T A_k l, \quad (4.4)$$

wobei A_k die Querschnittsfläche des Strömungskanals und l dessen Länge ist. Im stationären Zustand ist die Kühlungsleistung durch das Wasser gleich der Dissipationsleistung durch den elektrischen Strom. Aus Gleichung (4.4) folgt somit die Erwärmung des Wasser

$$\Delta T = \frac{P_c}{\rho c_p A_k |\vec{v}|}. \quad (4.5)$$

Nimmt man für die Dichte ρ und die spezifische Wärmekapazität c_p des Wassers

$$\rho \approx 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{und} \quad c_p \approx 4182 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad (4.6)$$

an, so ergibt sich bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 10 m/s eine Erwärmung des Wassers von etwa 0,11 K. Bei dieser Abschätzung bleiben die inhomogene Temperaturverteilung des Wassers über den Strömungsquerschnitt sowie die Temperaturabhängigkeiten der Materialparameter unberücksichtigt. Auch in der analytischen Abschätzung ist die Verdopplung der Temperaturzunahme bei Halbierung der Strömungsgeschwindigkeit nachvollziehbar.

4.2 Heizmodul

In vielen industriellen Prozessen ist das Erwärmen von Flüssigkeiten ein wichtiger Bestandteil des Prozesses. Beispielsweise werden in der Lebensmittelindustrie viele Speisen, z. B. Säfte und Marmelade, durch Erhitzen haltbar gemacht.

Um den lebensmittelrechtlichen Anforderungen zu genügen, muß das Produkt dazu für eine bestimmte Zeit auf einer bestimmten Temperatur gehalten werden.

Sofern die Flüssigkeit, die erhitzt werden soll, elektrisch leitfähig ist, kann ein elektrischer Strom durch die Flüssigkeit zum Aufheizen benutzt werden. Dazu werden Elektroden in die Flüssigkeit eingebracht. Die JOULEschen Verluste des Stroms werden in Wärme umgewandelt und heizen so die Flüssigkeit auf. Ein Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß durch die Formgebung des Heizbehälters und die Anordnung der Elektroden die Wärmequellenverteilung im Innern der Flüssigkeit beeinflussbar ist. Dadurch kann eine gleichmäßige Aufheizung der Flüssigkeit erfolgen, ohne daß diese mechanisch beansprucht wird, wie dies in einem Mischer oder Rührer der Fall wäre.

In der numerischen Simulation eines solchen Bauteils sind verschiedene Phänomene gekoppelt zu berücksichtigen. Die Strömung der Flüssigkeit durch das Modul ist ein fluiddynamisches Problem, der elektrische Stromfluß durch die Flüssigkeit ein elektrodynamisches und schließlich die Erwärmung des Fluides ein thermodynamisches.

Ein möglicher technischer Aufbau zur Realisierung einer solchen Heizanlage ist ein Rohr, das aus Heizmodulen besteht und von der Flüssigkeit durchströmt wird. In Abbildung 4.11 ist ein solches Heizmodul gezeigt. Das Modul besteht

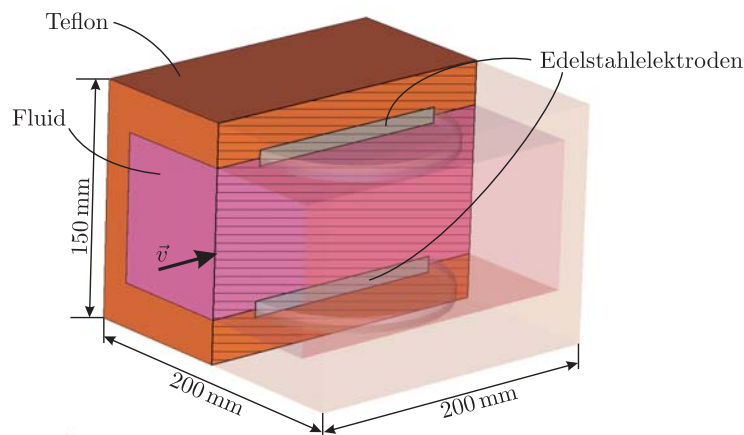


Abbildung 4.11: Schematische Darstellung des Heizmoduls. Der Pfeil gibt die Strömungsrichtung der Flüssigkeit an. Das Modul ist aus Teflon gefertigt.

aus Teflon. In der Heizanlage werden mehrere solcher Module hintereinander zu einem Rohr montiert. Die Anzahl der Module hängt von deren Ausführung und dem Prozess ab.

Im Innern eines jeden Moduls sind zwei Elektroden aus Edelstahl angebracht. Die Elektroden sowie die Abmessungen des Modells sind in Abbildung 4.12 gezeigt.

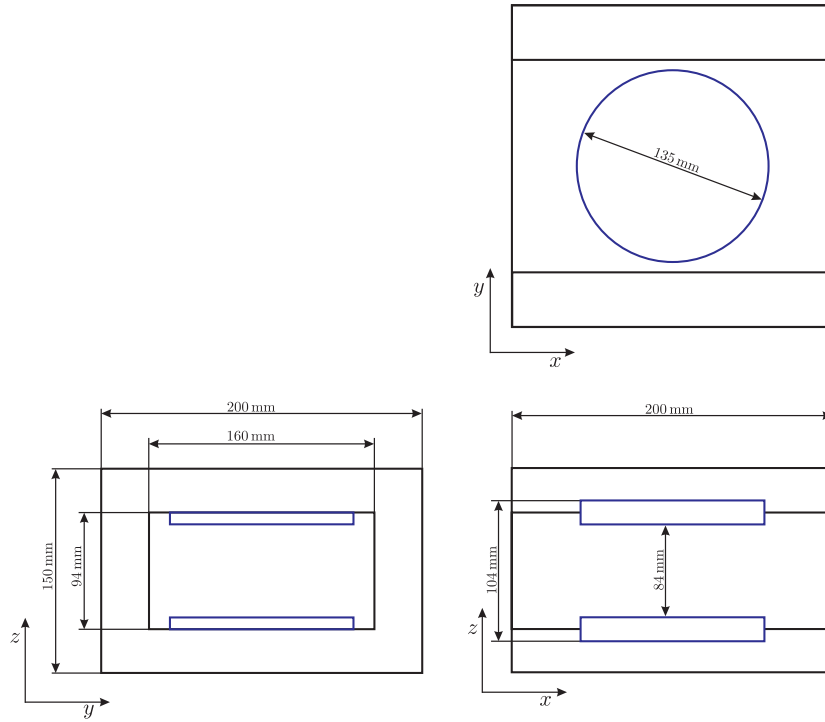


Abbildung 4.12: Maße des Heizmoduls. Die Elektroden aus Edelstahl sind in blau dargestellt. (Die Abbildungen sind nicht maßstäblich.)

Aufgrund der Symmetrie des Modells wurde nur ein Viertel der Geometrie mit den geeigneten Randbedingungen simuliert. Das Simulationsmodell, das in MAFIA verwendet wurde, ist in Abbildung 4.13 gezeigt.

Am unteren Rand in y -Richtung, der eine der beiden Symmetriefflächen ist, wurde für das elektrische Feld die Randbedingung $E_n = 0$ vorgegeben, am unteren Rand in z -Richtung, der zweiten Symmetrieffläche, $E_t = 0$. Diese zweite Symmetrieffläche ist eine Äquipotentialfläche der Struktur. Ihr wurde das feste Potential $\Phi = 0 \text{ V}$ zugeordnet. An den oberen Rändern in y - und z -Richtung werden offene Randbedingungen benutzt [20]. An den beiden Rändern in x -Richtung wurden jeweils die Randbedingungen $E_n = 0$ verwendet.

Die Spannung, die zwischen den Elektroden angelegt wird, variiert je nach Prozeß. In der Simulation wurde eine Spannung von $U = 250 \text{ V}$ angenommen, dies entspricht einem in der Lebensmittelindustrie gängigen Wert. Dem in Abbildung 4.13 blau dargestellten Materialblock wurde dementsprechend ein Potential von $\Phi = -125 \text{ V}$ zugeordnet. Das Gitter, mit dem das Modell in MAFIA diskretisiert wurde, besteht aus $25 \times 14 \times 13$, insgesamt 4550 Gitterknoten.

In FASTEST waren 24 Blöcke zur Diskretisierung der Struktur erforderlich. Insgesamt besteht das Gitter aus 259 200 Kontrollvolumen. Das Gitter ist in

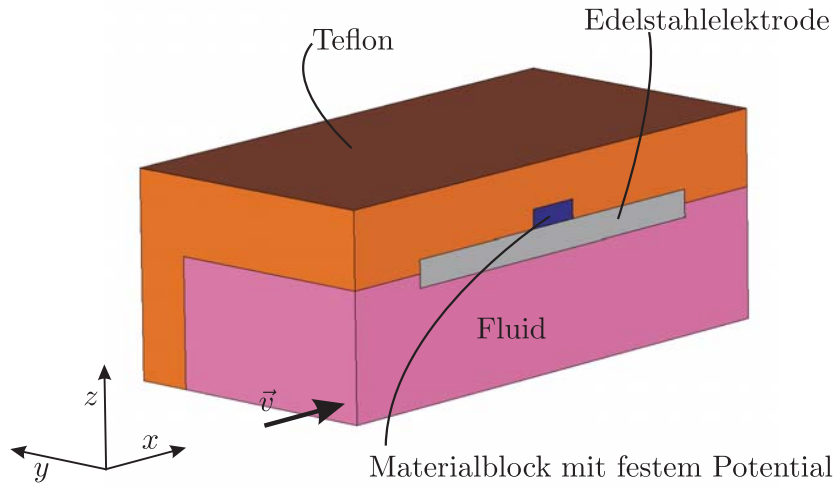


Abbildung 4.13: Simulationsmodell in MAFIA. Der in blau dargestellte zusätzliche Materialblock wird benötigt, um ein festes Potential als Anregung vorzugeben.

Abbildung 4.14 gezeigt. Zwischen sämtlichen Grenzen der Blöcke untereinander-

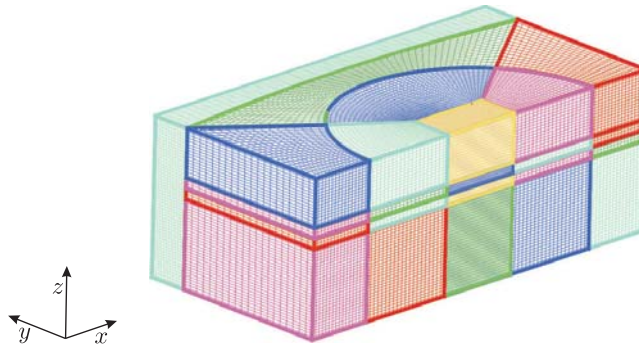


Abbildung 4.14: Gitter in FASTEST.

der wurde die Randbedingung Blockverbindung sowohl für die Fluid- als auch für die Thermodynamik gewählt. Am unteren Rand in x -Richtung wurde eine Einstromrandbedingung für die Strömung angegeben, entsprechend am oberen Rand eine Ausstromrandbedingung. Für die Thermodynamik galt an beiden Rändern für das Teflon eine NEUMANN-Randbedingung mit $\partial T / \partial n = 0$. Ebenso wurden die oberen Ränder in y - und z -Richtung mit dieser thermischen Randbedingung abgeschlossen. An den beiden unteren Rändern in diesen Richtungen

wurde für die Thermo- und die Fluidodynamik die Symmetrierandbedingung (s. Abschn. 3.1.1) benutzt.

Die Simulation wurde transient mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 1$ s durchgeführt. Für den Toleranzparameter der inneren Kopplung (s. Gl. (3.13)) wurde $\varepsilon_k < 10^{-3}$ vorgegeben. Als Flüssigkeit wurde Wasser simuliert. Die Einstromgeschwindigkeit des Wassers betrug in der Simulation $v = 2 \cdot 10^{-2}$ m/s, die Temperatur des einströmenden Wassers $T = 293,15$ K. Nach einer simulierten Zeit von $t = 3$ s ist der Gleichgewichtszustand erreicht. Die höchste Temperatur, die das Fluid am Ausstrom erreicht hat, beträgt $T = 293,4$ K. Die Temperaturverteilung nach $t = 3$ s ist in Abbildung 4.15 gezeigt.

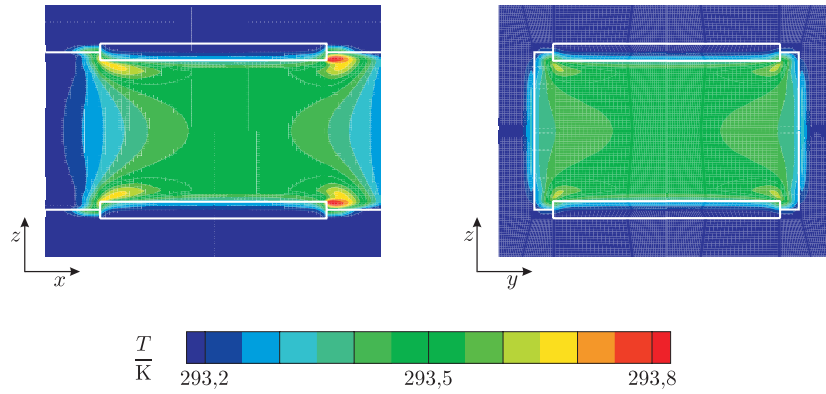


Abbildung 4.15: Temperaturverteilung im Heizmodul nach einer Zeit von $t = 3$ s. (Die Abbildungen sind nicht maßstäblich.)

Abbildung 4.16 zeigt die Verteilung der Wärmequellendichte im Modul und

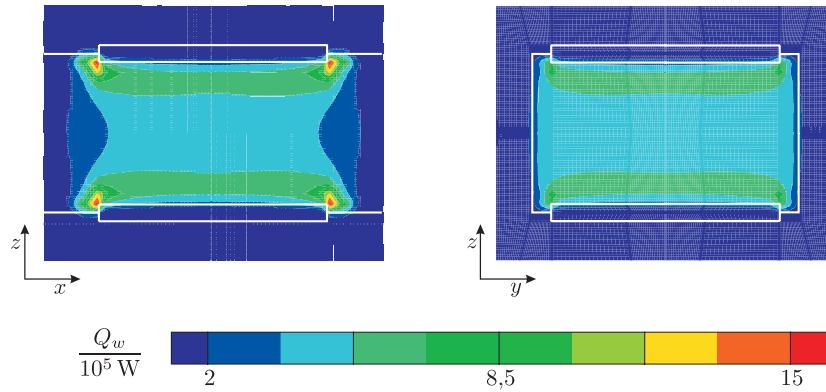


Abbildung 4.16: Wärmequellendichte im Modul nach $t = 3$ s. (Die Abbildungen sind nicht maßstäblich.)

Abbildung 4.17 die des Betrages der Stromdichte. Die gesamte Heizleistung in

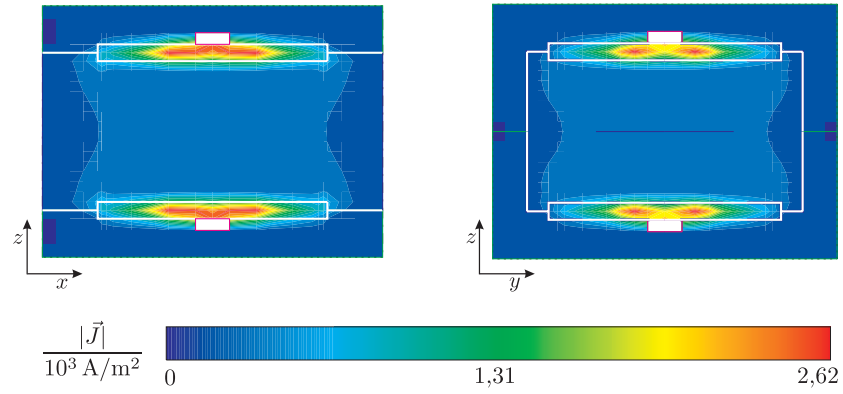


Abbildung 4.17: Betrag der Stromdichte im Modul. (Die Abbildungen sind nicht maßstäblich.)

dem Modul beträgt $P = 1,06 \text{ kW}$.

Ein maßgeblicher Parameter für die Heizleistung eines Moduls ist die Spannung zwischen den Elektroden. Wird die Spannung auf $U = 500 \text{ V}$ verdoppelt, so erhöht sich die Heizleistung auf $P = 4,23 \text{ kW}$. Die höchste Temperatur des Fluids am Ausstrom beträgt dann $T = 302,132 \text{ K}$. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.18 gezeigt.

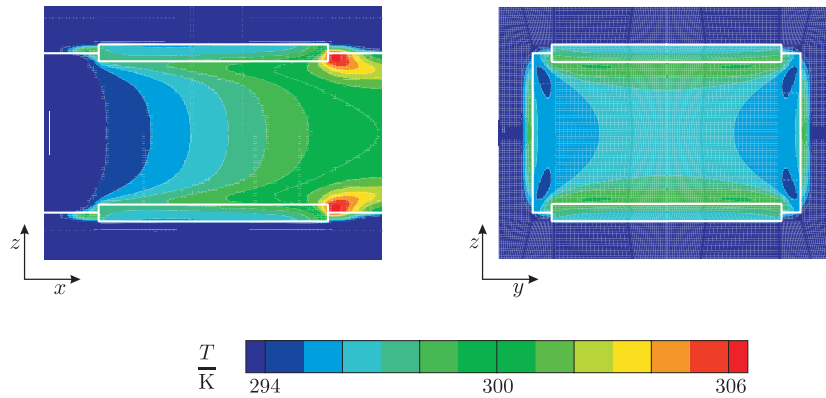


Abbildung 4.18: Temperaturverteilung im Modul bei einer Betriebsspannung von $U = 500 \text{ V}$. (Die Abbildungen sind nicht maßstäblich.)

4.3 Lichtbogendynamik in einem Niederspannungsschutzschalter

Ein weiterer Anwendungsfall, der untersucht wurde, ist die Ausbreitung eines Lichtbogens in einem Niederspannungsschutzschalter. Diese Schalter werden im Niederspannungsbereich bis etwa 1 kV für Gleichspannungsanwendungen eingesetzt. Dort erfüllen sie die Aufgaben des Überlast- und Kurzschlußschutzes sowie der Netztrennung, z. B. bei Elektromotoren.

In Abbildung 4.19 sind die stromführenden Laufschiene im geschlossenen

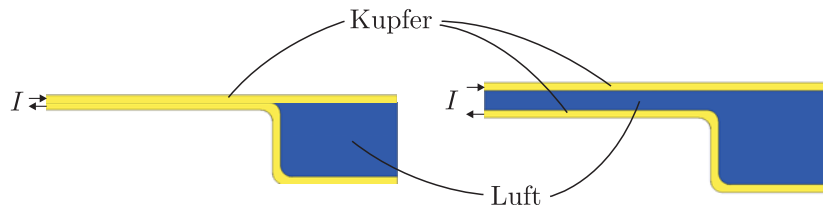


Abbildung 4.19: Schematische Darstellung der Laufschiene in einem Niederspannungsschutzschalter. Links ist der geschlossene Schalter gezeigt, rechts der geöffnete. Die Pfeile geben den Stromzu- und -abfluß in die Laufschiene an.

und im geöffneten Schalter schematisch dargestellt. Die Laufschiene wird aus Kupfer gefertigt. Im Falle einer Kurzschlußabschaltung wird beim Öffnen des Schalters aufgrund des hohen Stromes ein Lichtbogen gezündet. Dieser Lichtbogen – nicht die Kontakte – stellt das eigentliche Schaltelement des Niederspannungsschaltgerätes dar [30]. Daher ist eine detaillierte Kenntnis des Verhaltens des Lichtbogens zur Verbesserung und Neuentwicklung von Schaltgeräten von entscheidender Bedeutung. Um den Lichtbogen im Schalter zu löschen, gibt es verschiedene technische Ausführungen der Schalter. Hier wurde eine Variante mit geknickten Laufschiene betrachtet. Die Form und Abmessungen der Laufschiene sind in Abbildung 4.20 gezeigt.

Der Lichtbogen wird modelliert, wie es in Abschnitt 3.7 beschrieben ist. Demzufolge ist für die Simulation des Schutzschalters eine gekoppelte Simulation unter Berücksichtigung aller Zusammenhänge, wie sie in dieser Arbeit dargestellt wurden, erforderlich. In der Thermodynamik sind die JOULEschen Verluste als zusätzliche Quellen und die Wärmestrahlung zu berücksichtigen. In der Fluidodynamik treten die LORENTZkräfte als zusätzliche Quellterme auf. Schließlich wird die Leitfähigkeit der Luft im elektrodynamischen Teil der Simulation temperaturabhängig (s. Abb. 3.12) betrachtet.

Die durchgeführten Simulation beginnt mit einem zylindrischen Lichtbogen zwischen den geöffneten Laufschiene. Wie in Abschnitt 3.7 beschrieben, ist der Kernbereich des Lichtbogens das Gebiet, in dem für die Temperatur der Luft gilt $T > 10^4$ K. Als Startbedingung wird zwischen den Laufschiene eine

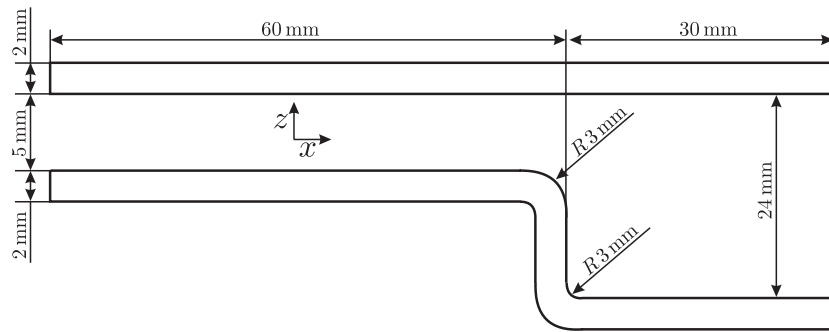


Abbildung 4.20: Abmessungen der Laufschienen. In y -Richtung haben die Laufschienen eine Ausdehnung von 5 mm. Das Koordinatenkreuz gibt den Ursprung des Koordinatensystems für die Simulation an. (Die Abbildung ist nicht maßstäblich.)

Temperaturverteilung gemäß

$$T(x, y, z) = 12 \cdot 10^3 \text{ K} \cdot e^{-(x^2+y^2) \cdot 10^5} + 293,15 \text{ K} \quad (4.7)$$

vorgegeben (s. Abb. 4.21).

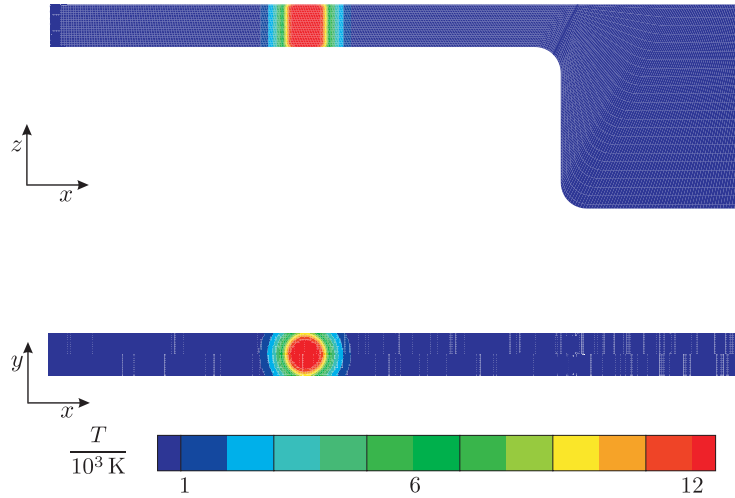


Abbildung 4.21: Startbedingung für den Lichtbogen. Dargestellt ist die Temperaturverteilung zwischen den Laufschienen.

Bei dem Simulationsmodell wurde der symmetrische Aufbau des Schalters ausgenutzt. Es wurde nur der halbe Schalter mit der x - z -Ebene als Symmetrieebene modelliert.

Im Modell, das in FASTEST verwendet wurde, wurden die Laufschiene nicht modelliert. Bei einem Schaltvorgang mit Lichtbogen verdampft die obere Schicht der Laufschiene, ein Vorgang, der im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurde. Da der gesamte Schaltvorgang innerhalb weniger Millisekunden abgeschlossen ist, erhitzt sich das Volumen der Laufschiene nur wenig, so daß ein nennenswerter Einfluß einer Erwärmung des Kupfers auf die Stromverteilung im Kupfer nicht vorhanden ist. Die offenen Ränder des Schalters in x -Richtung wurden in dieser Arbeit durch eine periodische Fortsetzung des Schalters angenähert (s. Abschn. 3.1.1). Dazu war es notwendig, einen Übergangsbereich am Ende der Lichtbogenkammer in das Modell einzufügen. In Abbildung 4.22 ist das Gitter, das in FASTEST verwendet wurde, gezeigt. Es besteht aus

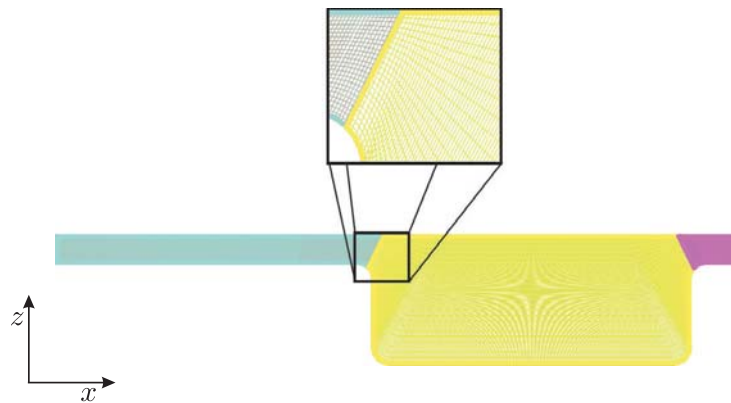


Abbildung 4.22: Gitter in FASTEST.

drei Blöcken mit insgesamt 186 624 Kontrollvolumen. Am unteren Rand in y -Richtung wurden für die Thermo- und die Fluidodynamik symmetrische Randbedingungen vorgegeben. In x -Richtung wurden für die fluide Strömung und die Wärmeausbreitung periodische Randbedingungen wie erläutert verwendet. Die übrigen Ränder wurden in der Fluidodynamik als feste Wände behandelt, in der Thermodynamik mit NEUMANN-Randbedingungen mit $\partial T / \partial n = 0$.

In MAFIA wurde das Modell analog zum zweidimensionalen Testbeispiel (s. Abschn. 3.7) um zwei Materialblöcke am unteren Rand der Laufschiene in x -Richtung ergänzt, um hier die Spannung vorzugeben. Das Gitter, das zur Diskretisierung des Modells in MAFIA verwendet wurden, ist in Abbildung 4.23 gezeigt. Es besteht aus $497 \times 9 \times 91$, insgesamt 407 043 Gitterpunkten. Für das elektrische Feld wurde an allen Rändern des Rechengebietes die Randbedingung $E_n = 0$ vorgegeben. Bei dem magnetostatischen Problem wurde in x - und z -Richtung $H_n = 0$ vorgegeben, in y -Richtung an beiden Rändern $H_t = 0$.

Die Simulation wurde transient mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ durchgeführt. Die Grenze für den Toleranzparameter der inneren Iteration (s. Gl. (3.13)) wurde auf $\varepsilon_k < 0,2$ gesetzt. Die Spannung zwischen den Laufschiene betrug $U = 100 \text{ V}$. Damit ergibt sich ein maximaler Strom von $I = 2,3 \text{ kA}$.

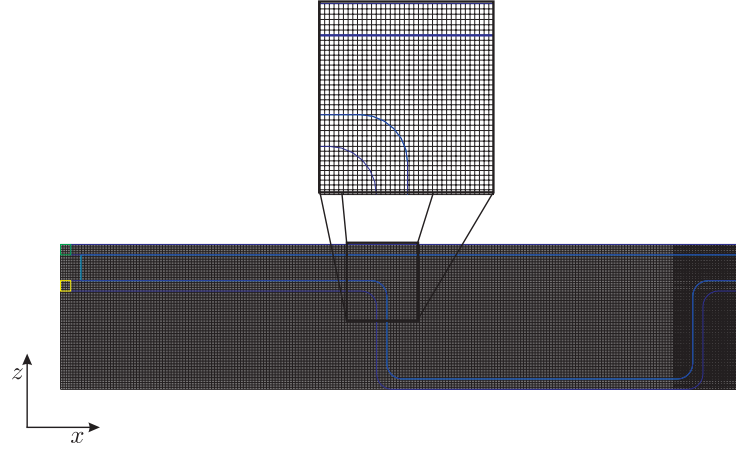
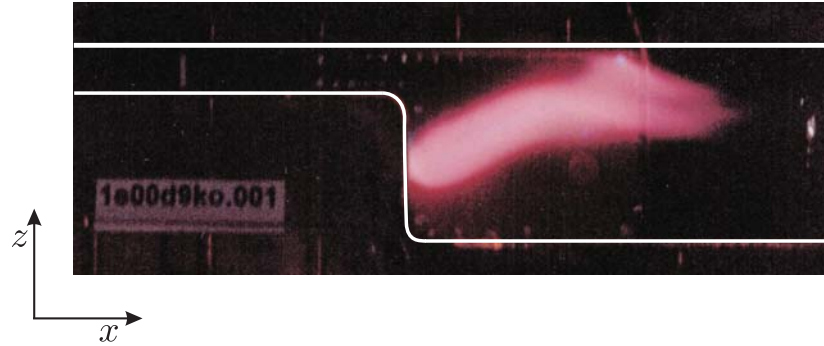


Abbildung 4.23: Gitter in MAFIA.

Mit den Ergebnissen dieser Arbeit konnten die in anderen Arbeiten erzielten Ergebnisse gut nachvollzogen werden [32, 33]. In Abbildung 4.24 ist eine Kurzzeitfotografie eines Lichtbogens nach einer Zeit $t = 939 \mu\text{s}$ gezeigt.

Abbildung 4.24: Kurzzeitfotografie des Lichtbogens nach $t = 939 \mu\text{s}$ (Quelle: Siemens AG, TU Wien [32]).

In Abbildung 4.25 ist die Temperaturverteilung in der Luft zwischen den Laufschienen zu verschiedenen Zeitpunkten gezeigt. Die Maximaltemperatur, die erreicht wird, liegt bei $T_{\text{max}} = 20662,3 \text{ K}$.

Abbildung 4.26 zeigt die fluide Strömung in dem Schalter ebenfalls zu verschiedenen Zeitpunkten. Es treten Strömungsgeschwindigkeiten von bis zu $v = 280,02 \text{ m/s}$ auf.

Wie aus dem Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Leitfähigkeit der Luft (s. Abb. 3.12) zu ersehen ist, wird die Luft ab einer Temperatur von $T = 5000 \text{ K}$ leitfähig. Die maximale Leitfähigkeit wird ab $T = 10000 \text{ K}$ erreicht. Für einige Zeitpunkte ist der elektrische Strom in Abbildung 4.27 gezeigt.

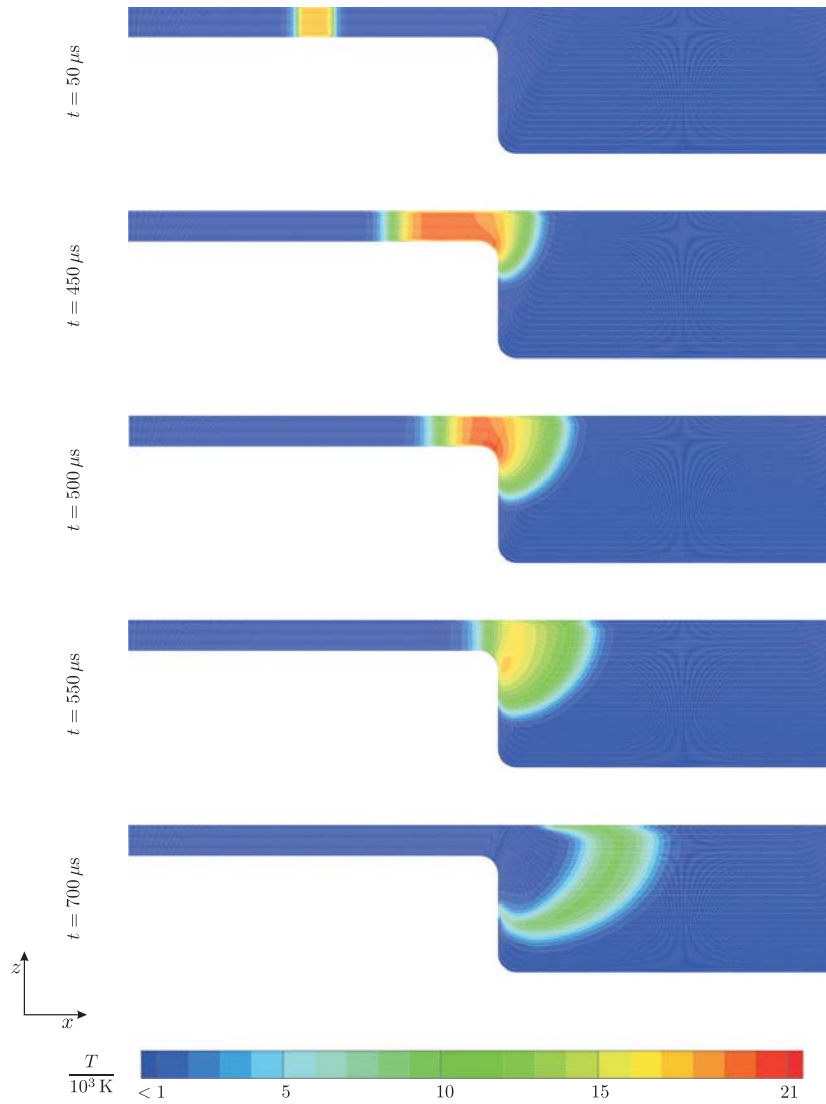


Abbildung 4.25: Temperaturverteilung im geöffneten Schalter zu verschiedenen Zeitpunkten.

Erreicht der Lichtbogen den ersten Knick der Laufschiene, so kühlt er rasch ab und erlischt schließlich. Dies ist auf die starke Längendehnung zurückzuführen, die der Lichtbogen an dieser Stelle erfährt. Nach einer Zeit von $t = 800 \mu\text{s}$ beträgt die maximale Temperatur im Schalter noch $T = 7654,2 \text{ K}$ (s. Abb. 4.28). Ein zusammenhängendes Gebiet, das sich von einer zur anderen Laufschiene erstreckt und in dem die Temperatur mindestens 5000 K beträgt, existiert nicht mehr. Der Strom durch den Schalter beträgt noch $I = 29 \text{ A}$.

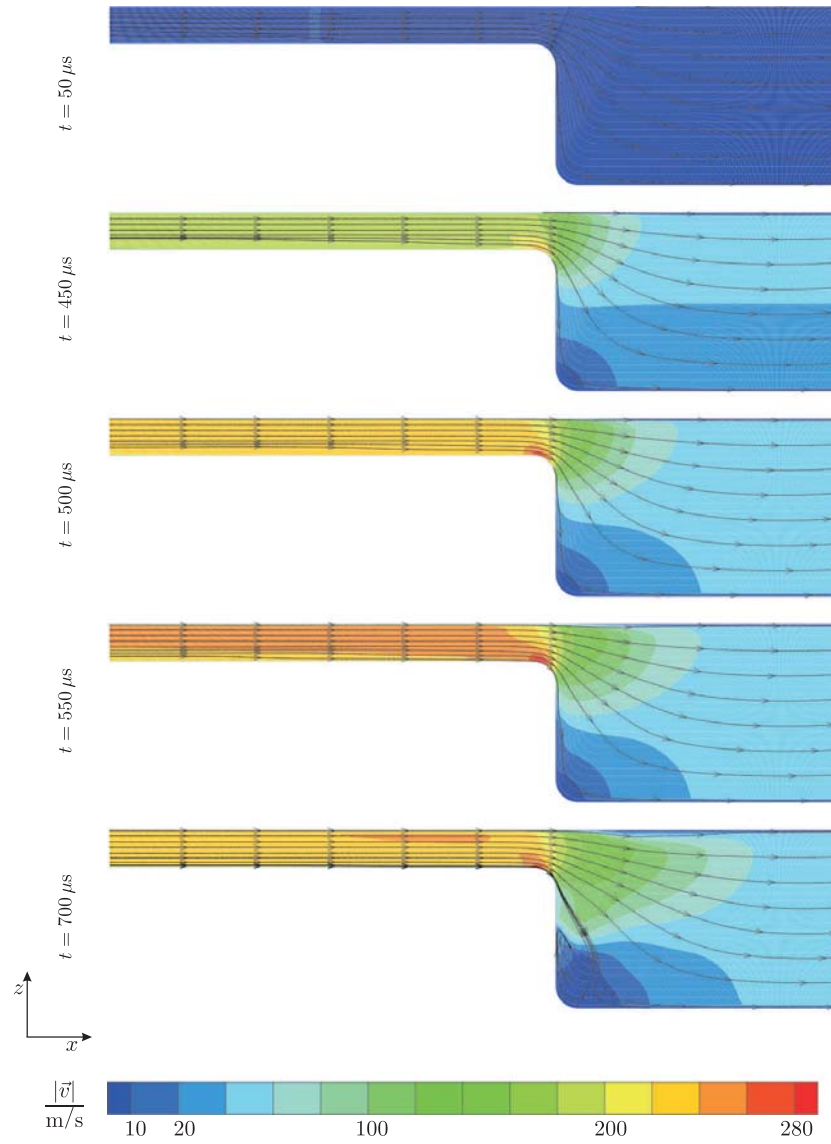


Abbildung 4.26: Strömungsfeld im geöffneten Schalter zu verschiedenen Zeitpunkten.

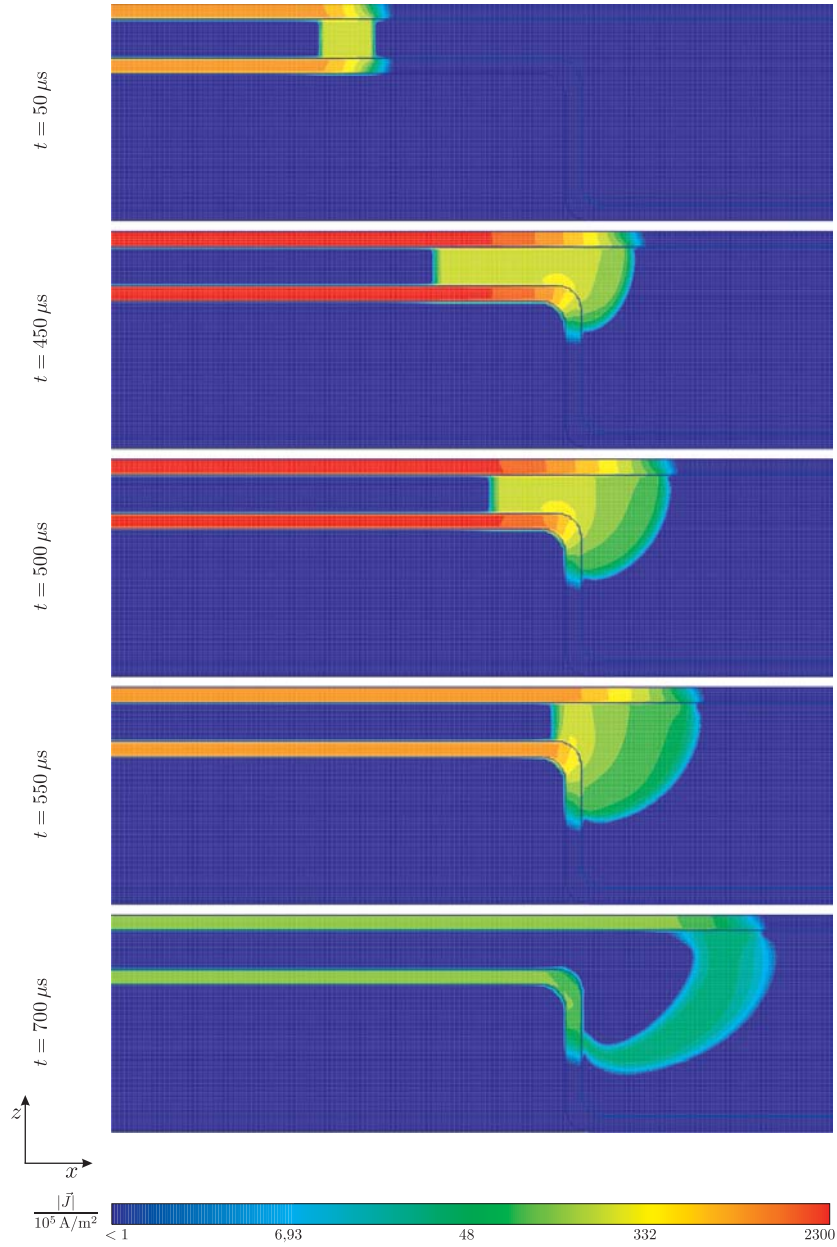


Abbildung 4.27: Betrag der Stromdichte im Schalter zu verschiedenen Zeitpunkten.

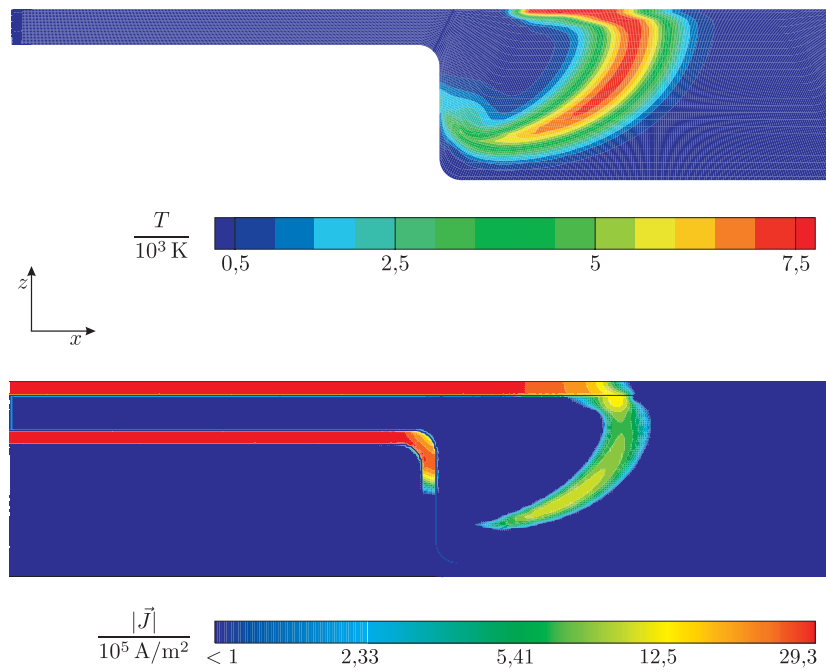


Abbildung 4.28: Temperaturverteilung und Betrag der Stromdichte zur Zeit $t = 800 \mu\text{s}$. Oben ist die Temperaturverteilung, unten die absolute Stromdichte gezeigt.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Den Ausgangspunkt für diese Arbeit bildeten die Simulationsprogramme FASTEST und MAFIA. FASTEST ermöglicht die Simulation fluid- und thermodynamischer Vorgänge. Mit MAFIA werden Probleme der Elektrodynamik simuliert.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde es ermöglicht, mit beiden Programmen gekoppelt Vorgänge zu simulieren, bei denen elektro-, fluid- und thermodynamische Prozesse von Bedeutung sind. Die Kopplung wurde sowohl mit der eigens entwickelten Kopplungsschnittstelle 3Dint als auch mit der Bibliothek MpCCI realisiert.

Anhand der Bewegung eines Lichtbogens zwischen zwei parallelen Kupferschienen wurde das numerische Verhalten in einer gekoppelten Simulation untersucht. Bei diesem Testbeispiel besteht zwischen den drei Teilgebieten der Elektro-, Thermo- und Fluidodynamik eine starke Kopplung.

Bezüglich der Gitterschrittweite, der Zeitschrittweite und des Toleranzparameters der inneren Iteration (s. Abschn. 3.5, Gl. (3.13)) wurde die Konvergenz der Fixpunktiteration gezeigt. Dabei zeigte sich bei allen Untersuchungen, daß die beste Konvergenzrate erzielt wird, wenn sowohl für die Interpolation von FASTEST zu MAFIA als auch in die entgegengesetzte Richtung die trilineare Interpolation verwendet wird. Dieses Interpolationsverfahren wurde im Rahmen dieser Arbeit implementiert und in der Berechnung der Anwendungsbeispiele eingesetzt.

Schließlich wurden drei Anwendungsbeispiele, die eine gekoppelte Simulation der drei Gebiete der Elektro-, Thermo- und Fluidodynamik erfordern, berechnet.

Das erste Anwendungsbeispiel war das wassergekühlte Kabel. In einer stationären Simulation wurde der eingeschwungene Zustand eines Stückes des Kabels simuliert. Mit Hilfe dieser Simulation konnte die Temperaturverteilung sowohl im Wasser als auch im Kupfer ermittelt werden. Ein wichtiger Parameter im Betrieb dieses Kabels ist die Durchflußmenge des Wassers. Es wurde gezeigt, daß eine Verminderung der Durchflußmenge erwartungsgemäß zu höheren Temperaturen im Kupfer führt.

Bei dem zweiten Beispiel, dem Heizmodul, wurde die Temperaturverteilung in der Flüssigkeit, die aufgeheizt werden soll, betrachtet. Bereits nach einer Zeit von 3 s ist die Maximaltemperatur im Fluid erreicht. Eine wichtige Stellgröße zur Beeinflussung der Heizleistung in einem Modul ist die Spannung zwischen den Elektroden. In der Simulation wurden die unterschiedlichen Temperaturverteilungen für zwei typische Spannungswerte ermittelt.

Das letzte Beispiel war die Bewegung des Schaltlichtbogens in einem Niederspannungsschutzschalter. Es wurde ein Schalter mit geknickter Laufschiene betrachtet. Der Lichtbogen wurde durch ein einfaches magnetohydrodynamisches Modell beschrieben. Die Simulationswerkzeuge, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden, ermöglichen die Betrachtung der Lichtbogenbewegung entlang der Laufschiene. Erreicht der Lichtbogen den Knick, so erfährt er eine starke Längenausdehnung, kühlt rasch ab, und erlischt. Mit den Simulationen dieser Arbeit konnten die Messungen aus [32] gut nachvollzogen werden.

Die Simulation gekoppelter Phänomene spielt in der gegenwärtigen Entwicklung von Simulationswerkzeugen eine erhebliche Rolle. Verfügbare Lösungen sind meist auf wenige spezielle Anwendungsfälle beschränkt. Die Entwicklung läßt erwarten, daß künftige Programme ein weiteres Einsatzspektrum aufweisen werden.

Symbolverzeichnis

Mathematik

$\frac{\partial}{\partial x}$	partielle Ableitung nach der Variablen x
$\frac{d}{dx}$	totale Ableitung nach der Variablen x
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b}
∇	Nablaoperator
$\operatorname{div} \vec{a}$	Divergenz des Vektorfeldes \vec{a}
$\operatorname{grad} a$	Gradient des skalaren Feldes a
δ_{ij}	KRONECKER-Symbol
Δ	LAPLACE-Operator
$f(x, y)$	Funktion mit den Variablen x und y
x, y, z	orthogonale Raumrichtungen des dreidimensionalen Raumes
ξ, η, ζ	lokale krummlinige Koordinaten
$\operatorname{rot} \vec{a}$	Rotation des Vektorfeldes \vec{a}
$\vec{a} \times \vec{b}$	Kreuzprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b}
$\frac{\partial}{\partial n}$	Normalenableitung
p	Ordnung einer Funktion
$d(P_a, P_b)$	euklidische Distanz zwischen den Punkten P_a und P_b
e^x	Exponentialfunktion
$\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}$	Untermatrizen der Systemmatrix \mathbf{A} eines gekoppelten algebraischen Gleichungssystems
$\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}$	
$\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_e$	Unbekannte des fluid- und thermodynamischen bzw. elektrodynamischen Teilproblems eines gekoppelten algebraischen Gleichungssystems
$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$	Teile des Vektors der rechten Seite eines gekoppelten algebraischen Gleichungssystems
N_p	Anzahl der Gitterpunkte
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen

Fluiddynamik

\vec{v}	Vektor der Strömungsgeschwindigkeit
p	Druck
ρ	Dichte
t	Zeit
V	Volumen

\vec{F}	Kraft
\vec{f}	Volumenkraftdichte
A	Fläche
\vec{A}	Normalenvektor einer Fläche A
\vec{g}	Erdbeschleunigung
v_i	i -te Komponente des Vektors \vec{v}
η	dynamische Viskosität
R	spezifische Gaskonstante

Thermodynamik

T	Temperatur
W_i	innere Energie
c_p	spezifische Wärmekapazität
\vec{J}_w	Wärmestromdichte
λ	thermische Leitfähigkeit
Q_w	Wärmequellendichte
Q_s	Strahlungsleistung
α	empirischer Wert, der den Strahlungsaustauschkoeffizienten und die Strahlungsfläche beschreibt
σ	STEFAN-BOLTZMANN-Konstante

Elektrodynamik

\vec{E}	elektrische Feldstärke
\vec{D}	elektrische Flußdichte
\vec{B}	magnetische Flußdichte
\vec{H}	magnetische Feldstärke
\vec{J}	elektrische Stromdichte
ρ	elektrische Raumladungsdichte
ε	elektrische Permittivität
κ	elektrische Leitfähigkeit
μ	magnetische Permeabilität
Φ	elektrisches Potential
\vec{A}	Vektorpotential
P_w	JOULEsche Verlustleistung
E_n, E_t	Normal- bzw. Tangentialkomponente des elektrischen Feldes
H_n, H_t	Normal- bzw. Tangentialkomponente des magnetischen Feldes
U	elektrische Spannung
I	elektrischer Strom
ρ	spezifischer elektrischer Widerstand

Finite Volumen Methode

n	Index der Gitterpunkte
n_i	Komponenten des Einheitsnormalenvektors
∂V	geschlossene Oberfläche des Volumens V

\dot{m}	Massenfluß
β	Wichtungsfaktor des <i>Flux-Blending</i>

Methode der Finiten Integration

$L_{\{x,y,z\}}$	primäre Gitterkante in $\{x, y, z\}$ -Richtung
$\bar{e}_{\{x,y,z\}}$	Gitterspannung in $\{x, y, z\}$ -Richtung
\vec{s}	Richtungsvektor entlang eines Integrationspfades
$\tilde{P}, \tilde{L}, \tilde{A}$	Punkt, Kante, Fläche des dualen Gitters
$\bar{\mathbf{b}}_{\{x,y,z\}}$	magnetischer Fluß über eine duale Fläche des Gitters in $\{x, y, z\}$ -Richtung
$\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}$	diskreter Rotationsoperator auf dem primären bzw. dualen Gitter
$\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}$	diskreter Divergenzoperator auf dem primären bzw. dualen Gitter
\mathbf{G}	diskreter Gradientenoperator auf dem primären Gitter
$\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{h}}$	Vektor der elektrischen bzw. magnetischen Gitterspannungen
$\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{b}}$	Vektor der elektrischen bzw. magnetischen Gitterflüsse
$\bar{\mathbf{j}}$	Vektor der elektrischen Gitterströme
\mathbf{q}	Vektor der Gitterladungen
$\mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{M}_\kappa, \mathbf{M}_\mu$	Materialmatrizen
$\tilde{\mathbf{D}}_A$	Diagonalmatrix der dualen Gitterflächen
\mathbf{D}_ε	Diagonalmatrix der gemittelten Permittivitäten
\mathbf{D}_S^{-1}	Diagonalmatrix der Reziprokwerte der primären Gitterkanten
$\mathbf{0}$	Nullmatrix bzw. Nullvektor
Φ	Vektor der Gitterpotentiale
j^*, b^*	Mittelwert-Zustandsgrößen des Gitterstroms und des magnetischen Gitterflusses

Physikalische Einheiten

W	Watt
m	Meter
N	Newton
K	Kelvin
S	Siemens
A	Ampère
s	Sekunde
V	Volt
Ω	Ohm

Literaturverzeichnis

- [1] S. Rugonyi, K. J. Bathe: „On Finite Element Analysis of Fluid Flows Coupled with Structural Interaction“, in *CMES – Computer Modeling in Engineering & Science*, Vol. 2, S. 195–212, 2001.
- [2] J. Hron, S. Turek: „A Monolithic FEM Solver for an ALE Formulation of Fluid-Structure Interaction with Configuration for Numerical Benchmarking“, in P. Wesseling, E. Oñate, J. Périaux (Hrsg.): *European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006*, Delft, 2006.
- [3] D. P. Mok: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*, Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [4] P. M. Pinder: *Zur numerischen Berechnung gekoppelter elektromagnetischer und thermischer Felder*, Dissertation, D17, Technischer Universität Darmstadt, 1998.
- [5] F. Durst, M. Schäfer: „A Parallel Block-Structured Multigrid Method for the Prediction of Incompressible Flows“, in *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, S. 549–565, 1996.
- [6] *MAFIA Users Guide*, CST GmbH, Darmstadt.
- [7] P. Frank, R. v. Mises: *Differentialgleichungen der Physik, Erster mathematischer Teil*, 2. vermehrte Aufl., Friedrich Vieweg & Sohn AG, Braunschweig, 1930.
- [8] P. Frank, R. v. Mises: *Differentialgleichungen der Physik, Zweiter physikalischer Teil*, 2. vermehrte Aufl., Friedrich Vieweg & Sohn AG, Braunschweig, 1935.
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London u. a., 1959.
- [10] M. Schäfer: *Numerik im Maschinenbau*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [11] E. Hering, R. Martin, M. Stohrer: *Physik für Ingenieure*, 6. Aufl., Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

- [12] C. Gerthsen: *Physik, Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen*, 8. Aufl., Springer Verlag, Berlin u. a., 1964.
- [13] W. Törnig, P. Spellucci: *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Band 1, Numerische Methoden der Algebra*, 2. Aufl., Springer Verlag, Berlin u. a., 1988.
- [14] W. Törnig, P. Spellucci: *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Band 2, Numerische Methoden der Analysis*, 2. Aufl., Springer Verlag, Berlin u. a., 1988.
- [15] T. Weiland: *Elektromagnetisches CAD, Rechnergestützte Methoden zur Berechnung von Feldern*, Skriptum zur Vorlesung Feldtheorie II, Technische Universität Darmstadt, 2000.
- [16] J. C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. I*, 3. Aufl., Oxford University Press, London, 1892.
- [17] J. C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. II*, 3. Aufl., Oxford University Press, London, 1892.
- [18] J. C. Rautio: „Maxwell’s Legacy“, in *IEEE Microwave Magazine*, S. 46–53, 2005.
- [19] T. Weiland: „Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis“, in *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik (AEÜ)*, Band 31, S. 116–120, 1977.
- [20] M. Dehler: *Numerische Lösung der Maxwell’schen Gleichungen auf zylindrischen Gittern*, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1993.
- [21] *MpCCI Technical Reference*, Fraunhofer Institute for Algorithms and Scientific Computing SCAI, Sankt Augustin, 2005.
- [22] *Tutorial: MpCCI SDK*, Fraunhofer Institute for Algorithms and Scientific Computing SCAI, Sankt Augustin, 2005.
- [23] L. Lapidus, G. F. Pinder: *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*, John Wiley & Sons, New York u. a., 1982.
- [24] D. Shepard: „A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data“, in *Proceedings–1968 ACM National Conference*, S. 517–524, 1968.
- [25] I. Amidror: „Scattered Data Interpolation Methods for Electronic Imaging Systems: A Survey“, in *Journal of Electronic Imaging*, Vol. 11, No. 2, S. 157–176, 2002.

- [26] P. Alfeld: „Scattered Data Interpolation in Three or More Variables“, in T. Lyche, L. L. Schumaker: *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, S. 1–34, 1989.
- [27] R. J. Renka: „Multivariate Interpolation of Large Sets of Scattered Data“, in *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 14, No. 2, S. 139–148, 1988.
- [28] K. W. Brodlie, M. R. Asim, K. Unsworth: „Constrained Visualization Using the Shepard Interpolation Family“, in *Computer Graphics forum*, Vol. 24, No. 4, S. 809–820, 2005.
- [29] K. Basso, P. R. de Ávila Zingano, C. M. dal Sasso Freitas: „Interpolation of Scattered Data: Investigating Alternatives for the Modified Shepard Method“, in *Proceedings, XII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing 1999*, S. 39–47, 1999.
- [30] F. Karetta: *Dreidimensionale Simulation wandernder Schaltlichtbögen*, Dissertation, TU Braunschweig, Fortschrittberichte VDI, Reihe 21, Nr. 250, VDI Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [31] H. Kuchling: *Taschenbuch der Physik*, 5.–8. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1986.
- [32] G. Andre, K. Berger, B. Gessl, W. Rieder, W. Schneider: „Lichtbogenbewegung bei geknickter Laufschiene“, in *VDE-Fachberichte 59, Kontaktverhalten und Schalten*, VDE-Verlag, Berlin, S. 177–185, 2003.
- [33] G. Andre, W. Rieder, W. Schneider: „Simulation der Bewegung magnetisch beblasener Lichtbögen in seitlich dichten Modellschaltern“, in *VDE-Fachberichte 55*, VDE-Verlag, Berlin, S. 123–132, 1999.
- [34] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew (Begr.): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1996.
- [35] A. S. Lipatov: *The Hybrid Multiscale Simulation Technology*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [36] F. Cap: *Lehrbuch der Plasmaphysik und Magnetohydrodynamik*, Springer Verlag, Wien, New York, 1994.
- [37] J. E. Drummond: *Plasma Physics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1961.
- [38] J. D. Jackson: *Klassische Elektrodynamik*, 4., überarbeitete Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2006.
- [39] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 3. Aufl., John Wiley & Sons, Inc., New York u. a., 1998.

- [40] G. A. Korn, T. M. Korn: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1961.
- [41] K. Burg, H. Haf, F. Wille: *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I, Analysis*, 3., durchgesehene Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [42] K. Burg, H. Haf, F. Wille: *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band IV, Vektoranalysis und Funktionentheorie*, 2., durchgesehene Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [43] F. Loebard: *Untersuchung der Eigenschaften einer Software zur thermischen Kopplung elektromagnetischer und fluiddynamischer Phänomene*, Diplomarbeit, FG Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau, TU Darmstadt, 2006.
- [44] W. Hackbusch, G. Wittum (Hrsg.): *Numerical Treatment of Coupled Systems, Proceedings of the Eleventh GAMM-Seminar Kiel, 20.–22. Januar 1995*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 51, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsges. mbH, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
- [45] R. W. Lewis, P. Bettess, E. Hinton (Hrsg.): *Numerical Methods in Coupled Systems*, John Wiley & Sons, Chichester u. a., 1984.
- [46] M. Edahiro, I. Kokubo, T. Asano: „A New Point-Location Algorithm and Its Practical Efficiency—Comparison with Existing Algorithms“, in *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 3, No. 2, S. 86–109, 1984.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland für die wissenschaftliche Betreuung dieser Arbeit sowie die hervorragenden Arbeitsbedingungen am Institut für Theorie Elektromagnetischer Felder. Herrn Prof. Dr. Michael Schäfer danke ich für die Übernahme des Korreferates.

Für die kompetente und engagierte Betreuung der Arbeit danke ich Herrn Dr. Erion Gjonaj.

Weiterer Dank gebührt dem Fachgebiet für Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau u. a. für die große Geduld und die zur Verfügung gestellte Rechenleistung, insbesondere Herrn Prof. Dr. Michael Schäfer, Frau Dr.-Ing. Dörte Sternel und den Herren Ulrich Scholler, Michael Fladerer, Marcus Heck, Plamen Pironkov, Florian Schmid und Michael Kornhaas.

Meinen Kollegen vom Institut für Theorie Elektromagnetischer Felder danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre am Institut und die vielen hilfreichen wissenschaftlichen Diskussionen, insbesondere den Herren Dr.-Ing. Wolfgang Ackermann, Sascha Schnepf und Robert Hampel.

Frau Marlis Gorecki danke ich für die umfangreiche Unterstützung außerhalb meiner wissenschaftlichen Arbeiten am Institut.

Schließlich danke ich Herrn Dr. Gerald Andre und Herrn DI Karl Berger für die freundliche Überlassung der Kurzzeitfotografie des Lichtbogens.

Abschließend geht mein Dank an alle andere Personen, die hier nicht namentlich erwähnt sind und auf die ein oder andere Weise einen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit geleistet haben.

Lebenslauf



- 29.07. 1976 geboren in Frankfurt am Main
- 1988–1995 Gymnasium und gymnasiale Oberstufe der Otto-Hahn-Schule Hanau
- 1995–1996 Wehrdienst bei der 4./Fernmeldeaufklärungsregiment 940 in Daun
- 1996–2001 Grund- und Hauptstudium der Elektrotechnik und Informationstechnik Studienrichtung Theoretische Elektrotechnik an der TU Darmstadt
- 2001–2007 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theorie Elektromagnetischer Felder im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik an der TU Darmstadt
- 2002–2006 Gründungsgeschäftsführer des Forschungszentrums Computational Engineering der TU Darmstadt